

## Mathematik

(Typus C / MN-Profil)

### Bemerkungen

- Dauer: 4 Stunden.
  - Hilfsmittel: Formelsammlung; Taschenrechner.
  - Taschenrechner dürfen unter den KandidatInnen nicht ausgetauscht werden.
  - Der Lösungsweg muss überall klar ersichtlich werden.
  - Jede der fünf Aufgaben ① bis ⑤ wird in der Bewertung gleich gewichtet.
  - Bitte beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite.
- 

①. Die Funktion  $f$  und ihre ersten beiden Ableitungen sind durch die Gleichungen  $y = 8x \cdot e^{-x/4}$ ,  $y' = (8 - 2x) \cdot e^{-x/4}$  und  $y'' = (\frac{x}{2} - 4) \cdot e^{-x/4}$  gegeben.

- Wie lautet die Gleichung der Tangente an den Graphen von  $f$  am Ort  $x = 0$ ?
  - Die Funktion  $f$  hat genau einen Wendepunkt  $W(p/q)$ . Welches sind seine exakten Koordinaten  $p$  und  $q$ ?
  - Zeigen Sie, dass die Funktion  $F$  mit der Gleichung  $y^* = (-32x - 128) \cdot e^{-x/4}$  eine Stammfunktion von  $f$  ist.
  - Die  $y$ -Achse zeige, wie üblich, nach oben: Wie gross ist der Flächeninhalt der Fläche, die im ersten Quadranten und unter dem Graphen der Funktion  $f$  liegt?
  - Die dritte Ableitungsfunktion von  $f$  hat die Gleichung:  $y^{(3)} = (\frac{3}{2} - \frac{x}{8}) \cdot e^{-x/4}$ .  
Vermuten Sie eine allgemeine Formel für die Gleichung  $y^{(n)} = \dots$  der  $n$ -ten Ableitungsfunktion der Funktion  $f$ . Ein Beweis wird nicht verlangt.
- 

②. Ein Schütze behauptet, dass er ein Ziel bei jedem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit  $p = 0.8$  treffe. Er schießt nun  $n$  mal auf sein Ziel und trifft dabei genau  $k$  mal.

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass er mit 3 Schüssen genau 2 mal trifft?
  - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit  $P$ , dass er mit 10 Schüssen höchstens 8 mal trifft?
  - Berechnen Sie für  $n = 64$  die Wahrscheinlichkeit  $P$  dafür, dass  $49 \leq k \leq 54$  ist.
  - Der Schütze gibt in einem Versuch  $n = 64$  Schüsse ab. Die Trefferzahl  $k$  ist dabei unerwartet klein! Hat der Schütze gelogen? Erklären Sie, wie diese Frage entschieden werden könnte, wenn  $k$  bekannt wäre. Geben Sie den allgemeinen Term an, der dazu berechnet werden muss. Womit muss diese Zahl dann verglichen werden?
  - Von einem anderen Schützen ist bekannt, dass er bei 2 Schüssen mit einer Wahrscheinlichkeit  $P = 0.255$  genau 1 mal trifft. Wie gross ist  $p$  bei diesem Schützen?
-

- ③. Gegeben ist die Gerade  $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  sowie der Punkt  $P(-3/13/16)$ .

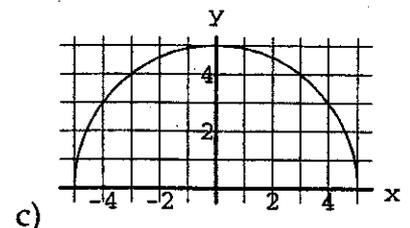
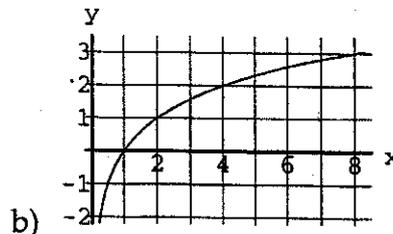
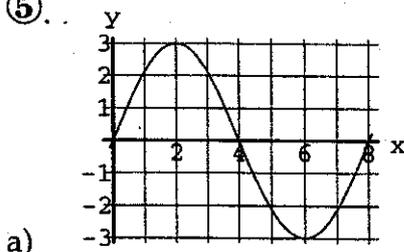
Der zum Parameter  $s$  gehörige Punkt der Geraden  $g$  wird  $X$  genannt.

- Welchen Winkel (auf  $^\circ$  gerundet) schliesst die Gerade  $g$  mit der Ebene  $z = 0$  ein?
- Welches ist die Koordinatengleichung  $ax + by + cz + d = 0$  der Ebene  $\sigma$ , die senkrecht zur Geraden  $g$  steht und den Punkt  $P$  enthält?
- Wie muss  $s$  gewählt werden, damit die Strecke  $XP$  senkrecht zur Geraden  $g$  steht?
- Die Strecke  $XP$  soll jetzt minimale Länge bekommen. Rechnen Sie vor, wie sich der Wert von  $s$  ergibt, wenn diese Aufgabe als Extremalwertproblem gelöst wird.
- Berechnen Sie den Abstand von  $P$  zu  $g$  unter Verwendung eines Vektorprodukts und ohne Benützung von Resultaten der Teilaufgaben c) oder d).

- ④. Die Grundmenge in dieser Aufgabe ist die Menge der komplexen Zahlen  $\mathbb{C}$ . Die Teilaufgaben sind voneinander unabhängig.

- Berechnen Sie die Summe  $s = (1 + i + i^2 + i^3 + \dots + i^{n-1} + i^n)$  für  $n = 317$  und erklären Sie, wie es zu diesem einfachen Resultat kommt.
- Zeichnen Sie in der Ebene der komplexen Zahlen jede Zahl  $z$  farbig ein, deren Quadrat den Realteil 0 hat.
- Gegeben ist die komplexe Funktion  $f: z \rightarrow w$  mit der Gleichung  $w = \frac{2 - a \cdot z}{z^2}$ . Wie muss die komplexe Zahl  $a$  gewählt werden, damit  $i$  auf  $4$  abgebildet wird?
- Gesucht sind die Fixpunkte der Funktion  $g: z \rightarrow w$  mit der Gleichung  $w = \frac{z^2 + 1}{i - z}$ .
- Die Zahlen  $z_1, z_2$  und  $z_3$  bilden in der Ebene der komplexen Zahlen ein positiv orientiertes, gleichseitiges Dreieck. Berechnen Sie  $z_3$  allgemein aus  $z_1$  und  $z_2$ .

⑤.



Gesucht sind die Gleichungen der obigen Funktionsgraphen, je mit kurzer Erklärung.

Abschliessend noch zwei weitere, voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

- Die Zahlen  $p, q, r, s, u$  und  $v$  sind reell. Wieviele Lösungen  $(x; y)$  hat das lineare Gleichungssystem  $\begin{pmatrix} p \cdot x + q \cdot y = u \\ r \cdot x + s \cdot y = v \end{pmatrix}$ ? Erklären Sie alle Spezialfälle.
- Zeigen Sie, dass der Winkel  $\beta$  im Dreieck  $ABC$  mit Seiten  $a = 5$  cm,  $b = 7$  cm und  $c = 8$  cm nicht nur ungefähr, sondern exakt  $60^\circ$  misst.