Eidg. / Schweiz. Maturitätsprüfungen　　Name / Vorname: ....

Frühling 2004, Zürich　　Gruppe / Nummer: ....

Mathematik

(Typus C / Erweitertes Niveau)

- Dauer: 4 Stunden.
- Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System.
- Der Lösungsweg muss überall klar ersichtlich werden.
- Resultate so einfach wie möglich (vorzugsweise exakt, sonst sinnvoll gerundet) angeben.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet.
- Bitte beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einem neuen Blatt.

---

1. Betrachten Sie die für alle reellen Zahlen x definierte Funktion f mit der Gleichung $f(x) = \frac{\sin(a\,x)}{a}$, wobei a ein positiver, reeller Parameter ist.

a) Zeichnen Sie die Graphen dieser Funktion für $a \in \{1, 1.5, 2\}$ und $x \in [0, 2\pi]$ (mit 6 Häuschen für die Einheit 1 in y-Richtung und 18 Häuschen für π in der x-Richtung).

b) Für welche positiven Werte von a hat der Graph von f am Ort $x = \frac{\pi}{2}$ die Steigung 1 ?

c) Berechnen Sie $\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$, wenn a eine beliebige natürliche Zahl ist.

d) Von allen Hochpunkten von f soll nun nur derjenige mit kleinstem positiven x-Wert betrachtet werden: Mit zunehmendem a verschiebt sich dieser Hochpunkt H(x/y) auf einer Bahnkurve. Wie lautet die Gleichung y(x) = ... dieser Bahnkurve?

e) Vermuten Sie eine allgemeine Formel für die Ableitungsfunktion $f^{(2n-1)}(x)$ (mit $n \in \mathbb{N}$), und beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

---

2. Gegeben ist die komplexe Abbildung $w = f(z) = (3 + 4i)\,z - 14 - 18i$.
Für w wird die Normalform $w = u + i\,v$ (u, v reell) verwendet.

a) Auf welchen Punkt w (in Normalform) wird der Punkt $z = 1 + 4i$ abgebildet?

b) Welcher Punkt z (in Normalform) wird auf den Punkt $w = 2 - 5i$ abgebildet?

c) Welche Fixpunkte (in Normalform) hat diese Abbildung?

d) Diese Abbildung kann als Drehstreckung um den Punkt $z_0 = 5 - i$ aufgefasst werden. Wie gross ist der Drehwinkel und wie gross der Streckfaktor?

e) Die imaginäre Achse der z-Ebene wird durch diese Abbildung auf eine Gerade mit der Gleichung $v = m\,u + q$ in der w-Ebene abgebildet. Berechnen Sie die Zahlen m und q.

---

3. Es wird mit einem idealen Spielwürfel (mit Augenzahlen 1 bis 6) gewürfelt.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 4 Würfen genau 1 Mal eine 6 zu würfeln?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in 16 Würfen mehr als 3 Mal eine 6 zu würfeln?

Bitte wenden ⇒

c) Ein Spieler darf – nach Bezahlung eines Einsatzes – mit einem Würfel ein Mal würfeln. Er erhält x Franken zurück, wenn die gewürfelten Augenzahl 1 oder 2 ist, andernfalls das Quadrat der gewürfelten Augenzahl in Franken. Der faire Einsatz (= Einsatz, bei welchem der Spieler bei vielen solchen Spielen im Mittel weder Geld verliert noch gewinnt) für dieses Spiel ist 17 Franken. Wie gross ist x?

d) Drei solcher Würfel werden gleichzeitig geworfen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Augenzahlen gleich sind oder ihre Summe grösser als 14 ist?

e) Wie viele Würfel müssen gleichzeitig miteinander geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens zwei Würfel die Augenzahl 6 zeigen?

---

4. Ein gerader Kreiskegel hat die Spitze S(–2/0/3), und der Mittelpunkt des Grundkreises ist M(4/–3/–3). Eine der Mantellinien des Kegels hat die Richtung $\vec{v} = \begin{pmatrix} -10 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

a) Wo durchsticht diese zu $\vec{v}$ parallele Mantellinie die Grundkreisebene?

b) Wie gross ist der Winkel zwischen der Kegelachse und den Mantellinien?

c) Wie gross ist das Kegelvolumen?

d) Zeigen Sie, dass die Gerade g: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 16 \\ -3 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ 2 \\ -9 \end{pmatrix}$ in der Grundkreisebene liegt.

e) Entscheiden Sie, ob die Gerade g den Grundkreis schneidet, berührt oder meidet (allfällige Schnittpunkte müssen nicht angegeben werden).

---

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

a) Die Zahl (–1) ist eine der Lösungen der Gleichung $z^3 = (-1)$ mit z aus $\mathbb{C}$. Bestimmen Sie alle anderen Lösungen exakt (in Normalform a + i b (a, b reell)), ohne dazu den Taschenrechner zu verwenden.

b) Vereinfachen Sie die Summe $\sum_{k=1}^{63} \log_b\left(\frac{k+1}{k}\right)$ zuerst so weit wie möglich. Wie muss die Basis b der Logarithmen gewählt werden, damit diese Summe gleich 3 wird?

c) Eine unendliche geometrische Folge beginnt mit $a_1 = \cos(x)$, $a_2 = \sin(x)$, $a_3 = \ldots$, wobei x eine gegebene reelle Zahl zwischen 0 und π (ohne diese Grenzen!) ist. Für welche dieser x konvergiert die zugehörige geometrische Reihe $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$?

d) Berechnen Sie ohne Taschenrechner den folgenden Grenzwert: $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{2\sin(x) - 1}{6x - \pi}$.

e) Durch die Matrix $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1.5 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ ist eine lineare Abbildung der x-y-Ebene gegeben. Bestimmen Sie alle Eigenvektoren dieser Matrix **A**.

(Ende)