Mathematik Erweitertes Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)
bzw. Typus C (Eidg. Maturitätsprüfung), Frühling 2005 Bern

Lösungen

1. a) $\frac{(x-2)^2}{81}+\frac{(y-3)^2}{49}=1$

   b) A=π a (1–a); A' = π (1–2a):=0 => a=1/2, b=1/2; A"= (–2)π < 0. Maximum.

   c) $V=\pi\int_{-6}^{6}\frac{36-x^2}{4}dx=\pi\left[9x-\frac{x^3}{12}\right]_{-6}^{6}$ = 72 π (= 4π/3 · 3^2 · 6).

   d) $\frac{d}{dx}\frac{3}{5}\sqrt{25-x^2}=(-\frac{3x}{5\sqrt{25-x^2}})\underset{x=4}{=}\frac{(-12)}{5\sqrt{25-16}}=(-\frac{4}{5})$.

   e) $\frac{d}{da}\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{x_o^2}{a^4}}=\frac{-\frac{2}{a^3}+\frac{4x_o^2}{a^5}}{2\sqrt{\frac{1}{a^2}-\frac{x_o^2}{a^4}}}:=0$ => a = $\pm\sqrt{2}\,x_o$.

2. a) $z_0=\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$; $z_1=-\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2}$; z_2 = (– i).

   b) W = {z = p + i q | p = 2 und q reell und q ≥ 0}.

   c) a = (–3) i, b = (–2) + i.

   d) f(z) = (z – (4+3i)) 2 cis(30°) + (4+3i) = (z – (4+3i)) 2 $(\frac{\sqrt{3}}{2}+i\frac{1}{2})$ + (4+3i) .

   e) Skizze hilft, oder mit Winkelfunktionen: Für 120° ≤ φ ≤ 240° .

3. a) 0.8 · 0.4 · 0.7 + 0.2 · 0.6 · 0.7 + 0.2 · 0.4 · 0.3 = 33.2 % .

   b) 0.8 · 0.4 · 0.7 / (33.2 %) = 67.4$\underline{7}$ % .

   c) $1-0.7^{10}-10\cdot0.7^9\cdot0.3-\binom{10}{2}0.7^8\cdot0.3^2-\binom{10}{3}0.7^7\cdot0.3^3=35.\underline{0}$ % .

   d) W = 1 – 0.4^n – n · 0.4^{n-1} · 0.6 > 99.9% ; passende Tabelle: 11 Mal schiessen.

n =	10	11	12	...
W ≈	0.99832	0.99927	0.99968	...

   e) E(X) = 120.- = 0.8 · 0.2 G + 0.8 · 0.2^2 2G + 0.8 · 0.2^3 4G + ... = 0.266... G ; 450.- .

4. a) **v** = (**b**–**a**) x (**c**–**a**) = $\begin{pmatrix}-15\\3\\45\end{pmatrix}$; |**v**| = $\sqrt{2259}=3\sqrt{251}$; A(Δ) = $\frac{3}{2}\sqrt{251}$.

   b) E: (–5)x + y + 15z = 67; HNF: (–5x + y + 15z – 67) / $\sqrt{251}$ =0; $\frac{67\sqrt{251}}{251}$.

   c) M(3 / 5 / 0); r = 7.

   d) Abstandsquadrat = 113 + 104 t + 26 t^2 ; t_{min} = (–2). => P (3 / 4 / 7)

   e) 342 + 186 t + 26 t^2 = 9; 333 + 186 t + 26 t^2 = 0; D = 186^2 – 4 · 26 · 333 = (– 36); kein Schnitt der Geraden mit der Kugel.

5. a) Skalarprodukt: 9 t^2 / (4 + 9 t^2) = 1/2. Für t = (–2/3) oder t = 2/3.

   b) Regel von de L'Hôpital: Grenzwert = ln(10) = 2.30$\underline{3}$.

   c) Potenz beginnt mit 10^(2005 lg(2004) – floor(2005 lg(2004)), also mit 2018...; $(04)^k$ hat Periode 20 für die letzten beiden Ziffern. Die Potenz endet mit ...24.

   d) Verankerung (z.B. bei n = 1) und Induktionsschluss.

   e) λ_1 = (–3), λ_2 = 6; $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}4\\5\end{pmatrix}$ sind die zugehörigen Eigenvektoren.