**Schweizerische / Eidg. Maturitätsprüfung** Gruppe / Nr.: ............................................

**Frühling 2006, Bern** Name / Vorname: ......................................

---

# Mathematik

## Erweitertes Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)
## bzw. Typus C (Eidg. Maturitätsprüfung)

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner (=TR) ohne Computer-Algebra-System.
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall klar ersichtlich sein.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für Note 6 müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite.

---

1. Gegeben ist die Gleichung f(x) = $(x^2-1)(x^2-a^2)$ einer Funktion f, wobei a ein positiver, reeller Parameter ist.

   a) Berechnen Sie allgemein das Integral $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx$.

   b) Wie muss a gewählt werden, damit das in b) berechnete Integral maximal wird? Der Maximalwert selber ist nicht gefragt. Wenn Teilaufgabe b) nicht gelöst wurde, verwenden Sie als Wert dieses Integrals $4a^3 - \frac{4a^5}{5}$.

   c) Beweisen Sie algebraisch, dass der Graph der Ableitungsfunktion f'(x) für jedes a punktsymmetrisch ist.

   d) Bestimmen Sie für a = 2 die Koordinaten der Tiefpunkte dieser Funktion f.

   e) Zeichnen Sie den Graphen dieser Funktion f mit a = 2 für (–2) ≤ x ≤ 2 (Einheiten: Auf beiden Achsen je 2 Häuschen).

---

2. Gegeben ist die komplexe Zahl $z_0 = 0.3 + 0.4\,i$, welche einem Punkt P in der Gauss'schen Zahlenebene entspricht.
   Geben Sie Resultate in Normalform (also in der Form a + i b, mit a, b $\in \mathbb{R}$) an:

   a) Die Zahl $\overline{z}_0$ ist die zu $z_0$ konjugiert komplexe Zahl. Berechnen Sie $z_0 \cdot \overline{z}_0 - (z_0 + \overline{z}_0)$.

   b) Berechnen Sie $z_0^{-1}$, ohne den TR zu verwenden.

   c) Durch eine Drehung um den Ursprung wird der Punkt P auf den Punkt Q abgebildet, welcher der Zahl w = 0.5 i entspricht. Geben Sie die Gleichung der zugehörigen Abbildung g in der Form w = g(z) = (a + i b) · z (mit a, b $\in \mathbb{R}$) an.

   d) Berechnen Sie, für das oben gegebene $z_0$, die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(z_0 - 0.1)^k$.

   e) Der oben gegebene Punkt P sei der Mittelpunkt eines Kreises k mit Radius 1. Jedem Punkt dieses Kreises k entspricht eine komplexen Zahl. Welche dieser Zahlen hat den grössten Betrag?

---

3. Gegeben sind die beiden Ebenen E: $x - 2y - 2z = 0$ und F: $3x + 4y - 12z = 0$, der Punkt A(7/11/0), dessen Ortsvektor mit $\vec{r}_A$ bezeichnet wird, sowie der Punkt B(1/–1/9).
   a) Unter welchem Winkel $\alpha$ ($\alpha < 90°$, auf ganze Grade gerundet) schneiden sich diese beiden Ebenen E und F?
   b) Geben Sie eine Gleichung der Geraden g durch den Punkt A an, die sowohl zur Ebene E wie zur Ebene F parallel verläuft.
   c) Von welcher der beiden Ebenen E respektive F hat A den grösseren Abstand?
   d) Welcher Punkt C der Geraden (AB) hat vom Ursprung O(0/0/0) den kleinsten Abstand?
   e) Betrachten Sie alle Punkte P mit Ortsvektor $\vec{r}_P$, für die gilt: $|\vec{r}_P \times \vec{r}_A| = |\vec{r}_A|$. Beweisen Sie – mit ausführlichem Kommentar – dass der Abstand von jedem dieser Punkte P vom Ursprung mindestens 1 ist.

---

4. Fünf Jäger werden ausgeschickt, um eine Rotte von fünf Wildschweinen zu erlegen. Jeder der Jäger hat – bei jedem Schuss – eine Trefferwahrscheinlichkeit von 60 %.
   a) Alle fünf Jäger schiessen miteinander je genau ein Mal auf das gleiche Wildschwein. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dieses Wildschwein nicht getroffen wird?
   b) Einer der Jäger steht allein vor der ganzen Rotte und gibt auf jedes der fünf Wildschweine je genau einen Schuss ab. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens drei Wildschweine getroffen werden?
   c) Wie oft muss ein Jäger im Mittel allein auf ein Wildschwein schiessen, bis er mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99% mindestens ein Mal getroffen hat?
   d) Wieviele Schüsse muss ein einzelner Jäger im Mittel auf ein Wildschwein abgeben, bis er zum ersten Mal getroffen hat? Tipp: Für $|p| < 1$ gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} k \cdot p^{k-1} \equiv (1-p)^{-2}$.
   e) Die ganze Rotte von fünf Wildschweinen erscheint vor den fünf Jägern. Jeder schiesst genau ein Mal auf irgend ein jeweils zufällig von ihm ausgewähltes Wildschwein. Wie viele der fünf Wildschweine werden – im Mittel – nicht getroffen?

---

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

   a) Ist das Produkt zweier verschiedener Irrationalzahlen immer ebenfalls irrational? Erklären Sie den Sachverhalt und geben Sie passende Beispiele an.

   b) Ein gegebenes Quadrat wird so zentrisch gestreckt, dass seine Fläche um 56.25 % zunimmt. Mit welchem Streckfaktor muss das neue Quadrat erneut zentrisch gestreckt werden, damit sein Bild wieder gleiche Fläche wie das erste, gegebene Quadrat hat?

   c) Verwenden Sie die Definition $f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$, um damit die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^3$ herzuleiten.

   d) Der Graph der Funktion mit der Gleichung $y(x) = a^x$ berührt die Winkelhalbierende mit der Gleichung $y(x) = x$. Berechnen Sie a.

   e) Die Ketten– und die Produkt–Regel bei Ableitungen gelten als bekannt. Betrachten Sie $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ als $\frac{d}{dx}\left(f(x) \cdot \frac{1}{g(x)}\right)$ und leiten Sie damit die Quotientenregel her.

---

(Ende)