Lösungen Schweizerische / Eidgenössische Maturitätsprüfung Frühling 2006
Erweitertes Niveau / Typus C

Lösungen:

1. a) $\left[\frac{x^5}{5}-\frac{(a^2+1)\cdot x^3}{3}+a^2x\right]_{-a}^{+a} = \frac{4a^3}{3}-\frac{4a^5}{15}$.

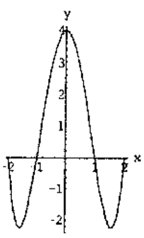
1. b) $4a^2-\frac{4a^4}{3}=0$ ergibt $a=\sqrt{3}$ (da a > 0 sein soll nach Vor.; gleiche Lösung bei Verwendung der Alternative!); $8a-\frac{16a^3}{3}\Big|_{a=\sqrt{3}} = (-8)\sqrt{3}<0$: ⇒ Maximum.

1. c) $f'(x) = 4x^3 - 2x(a^2+1)$; $f'(-x) = -f'(x)$; $f'(x)$ ist ungerade Funktion.

1. d) Für a = 2: $f'(x) = 4x^3 - 10x$; Extremalstellen bei $x_1 = \frac{\sqrt{10}}{2}$, $x_2 = -\frac{\sqrt{10}}{2}$, $x_3 = 0$;

$f''(x_1) = f''(x_2) = 20 > 0$: Minima; $T_1(\frac{\sqrt{10}}{2} / -\frac{9}{4})$, $T_2(-\frac{\sqrt{10}}{2} / -\frac{9}{4})$; $f''(x_3) = (-10) < 0$.

1. e):



2. a) 0.25 − 0.6 = (−0.35).

2. b) $\frac{0.3-0.4i}{(0.3+0.4i)(0.3-0.4i)} = 1.2 - 1.6i$.

2. c) $g(z) = (0.8 + 0.6i)\cdot z$.

2. d) $(1 + (z_o - 0.1) + (z_o - 0.1)^2 + \ldots) = \frac{1}{1-(z_o-0.1)} = \frac{1}{0.8-0.4i} = 1+0.5i$.

2. e) Graphisch; oder ableiten: $z_{max} = z_o + \mathrm{cis}(\varphi)$ (mit $\varphi = \arctan(4/3)$) = 0.9 + 1.2i = 3 z_o.

3. a) arccos((2 − 8 + 24) / (3 · 13)) ≈ 61°.

3. b) Eine mögliche Gleichung: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 16 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}$; auch als richtig gilt: $\vec{r} = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 32 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$.

3. c) Beide Abstände sind gleich: $\left| \frac{1 \cdot 7 - 2 \cdot 11 - 2 \cdot 0}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-2)^2}} \right| = \left| \frac{3 \cdot 7 + 4 \cdot 11 - 12 \cdot 0}{\sqrt{3^2 + 4^2 + (-12)^2}} \right| = 5.$

3 d) $|\vec{r}| = \left| \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} \right| \rightarrow \text{min.}$: $522s - 348 = 0$; $s = 2/3$; der Punkt ist C(3/3/6). Oder mit

dem Skalarprodukt: $\left(\begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} \right) \bullet \begin{pmatrix} -6 \\ -12 \\ 9 \end{pmatrix} = 0$, mit gleichem Resultat.

3. e) $| \vec{r}_P \times \vec{r}_A | = | \vec{r}_P | \cdot | \vec{r}_A | \cdot | \sin(\varphi) | = | \vec{r}_A |$; damit $| \vec{r}_P | = \frac{1}{|\sin(\varphi)|} \geq 1$.

4. a) $0.4^5 = 1.024$ %.

4. b) $\sum_{k=0}^{3} \binom{5}{k} 0.6^k \, 0.4^{5-k} = 1.024$ % + 7.68 % + 23.04 % + 34.56 % = 66.304 %.

4. c) $0.99 > 1 - 0.4^k \Rightarrow 5.02\underline{6} < k \leq \text{ceiling}(5.02\underline{6}) = 6 = k_{min}$.

4. d) $0.6 \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot 0.4^{k-1} \equiv 0.6\,(1 - 0.4)^{-2} = \frac{5}{3}$.

4. e) Die W. für das 1. Wildschwein, dass es vom 1. Jäger nicht getroffen wird, ergibt sich zu $1 - 1/5 \cdot 0.6 = 88$ %. Die W., dass das 1. Wildschwein von keinem Jäger getroffen wird, ist $0.88^5 = 52.\underline{8}$ %. Das Gleiche gilt aber auch für alle andern 4 Wildschweine: Im Mittel werden $5 \cdot 0.8\underline{8}^5 = 2.6\underline{4}$ Wildschweine nicht getroffen.

5. a) Nicht unbedingt: $(\sqrt{2} - 1)(\sqrt{2} + 1) = 1$. Kann aber sein: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$.

5. b) Der Streckfaktor war $\sqrt{1.5625} = 1.25$; der zweite Streckfaktor ist darum 0.8.

5. c) Grenzwert von $3x^2 + 3x \cdot \Delta x + (\Delta x)^2$ für $\Delta x \rightarrow 0$ berechnen: $f'(x) = 3x^2$.

5. d) System: $\left| \begin{matrix} a^x = x \\ a^x \cdot \ln(a) = 1 \end{matrix} \right|$; daraus a^x eliminieren: Es folgt: $\ln(a) = \frac{1}{x}$, und daraus $a = e^{1/x}$.
Dieses a, in der ersten Gleichung eingesetzt, ergibt e = x, woraus weiter folgt: $a^e = e$.
Ziehen der e–ten Wurzel ergibt das Resultat: $a = e^{1/e} \approx 1.444\underline{7}$.

5. e) Wichtigster Schritt darin: $\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = \frac{d}{dx}((g(x))^{-1}) = (-1)(g(x))^{-2} \cdot \frac{d}{dx}(g(x))$.