Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Frühling 2007 Bern Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner ohne Computer–Algebra–System.
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall klar ersichtlich und wo nötig kommentiert sein.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einem neuen Blatt.

---

1. Gegeben ist die Gleichung $y = f_t(x) = (1 - \frac{x}{t}) \cdot \sqrt{x}$ einer Funktion f_t, wobei t ein positiver, reeller Parameter ist.

a) Berechnen Sie $\int_0^t f_t(x)\,dx$ für t = 9 mit Hilfe einer Stammfunktion.

b) Zeigen Sie, dass der Graph von f_t für jedes t immer genau einen Hochpunkt hat, und berechnen Sie seine Koordinaten für t = 3.

c) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von f_t für t = 1 (und x > 0) die x–Achse?

d) Zeichnen Sie die Graphen von f_t für t = 1 und t = 3 (für $0 \le x \le 3$ und $(-0.5) \le y \le 1.5$; Einheiten auf beiden Achsen je 10 Häuschen!) ins gleiche Diagramm.

e) Die Hochpunkte der Graphen von f_t für verschiedene Werte von t liegen alle auf einer Kurve, die mit einer Funktionsgleichung h(x) = ... beschrieben werden kann. Geben Sie die Gleichung dieser Funktion h an.

---

2. Die Abbildung f mit der Gleichung $w = f(z) = (5 - 12i) \cdot z - 8i$ ordnet jedem komplexen Argument z einen komplexen Funktionswert w zu.

a) Berechnen Sie den Funktionswert w in Normalform, wenn z = 2 + 3i ist.

b) Die Abbildung f lässt sich umkehren; wie heisst die Gleichung ihrer Umkehrfunktion f^* (in der Form $f^*(z) = a \cdot z + b$, mit $a, b \in \mathbb{C}$, beide in Normalform!)?

c) Berechnen Sie allgemein für die komplexen Zahlen z_1 und z_2 (mit $z_1 \neq z_2$) den Term $\frac{|f(z_2) - f(z_1)|}{|z_2 - z_1|}$, und vereinfachen Sie diesen so weit wie möglich.

d) Beschreiben Sie die Punktmenge in der komplexen Zahlenebene, auf welche die reelle Achse durch diese Abbildung f abgebildet wird, möglichst präzis.

e) Ein gewisser Kreis k in der komplexen Zahlenebene, der die reelle Achse berührt, wird durch die Abbildung f auf einen konzentrischen Kreis k' abgebildet. Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Bildkreises k'.

---

3. Eine Kugel S mit Mittelpunkt M(1/2/3) und Radius $r_S = 35$ wird von der Ebene E: $2x + 3y + 6z = 173$ geschnitten.

a) Geben Sie eine Gleichung der zur Ebene E parallelen Ebene F, die den Kugelmittelpunkt enthält, in Koordinatenform an.

b) Welcher Bruchteil der Kugeloberfläche der Kugel S befindet sich unterhalb der Grundrissebene z = 0?

c) Zeigen Sie, dass der Punkt A(31 / 19 / z_A) auf dem Schnittkreis k der Ebene E mit der Kugel S liegt, und geben Sie seine Koordinate z_A an.

d) Wie gross ist der Radius r_k dieses Schnittkreises k der Ebene E mit der Kugel S?

e) Geben Sie den Mittelpunkt M' und den Radius r' der grössten all jener Kugeln an, welche die Kugel S von innen und gleichzeitig auch die Ebene E berühren.

---

4. Die Firma Tryhard Ltd. produziert mit zwei Produktionslinien gleiche, optisch ununterscheidbare Speicherchips. Aus langen Testreihen ist bekannt, dass aus der ersten Produktionslinie 80 % aller Chips einwandfrei sind, aus der zweiten aber nur gerade 60 %.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 5 aus der ersten Produktionslinie zufällig ausgewählten Chips genau 4 einwandfrei sind?

b) Wie viele Chips der zweiten Produktionslinie müssen zufällig ausgewählt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99.9 % mindestens einer einwandfrei ist?

c) Ein Behälter enthält 125 Chips aus der ersten und 85 Chips aus der zweiten Produktionslinie. Ein Chip wird daraus zufällig ausgewählt und getestet: Er ist einwandfrei! Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass er aus der zweiten Produktionslinie stammt?

d) Wie viele Chips aus der ersten Produktionslinie müssen zufällig ausgewählt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 99.9 % mindestens zwei Chips einwandfrei sind? Lösen Sie diese Aufgabe mit einer kleinen Tabelle!

e) Der Kunde Goodfaith Ltd. bestellt immer wieder Pakete mit 4 Chips aus der zweiten Produktionslinie, testet die Sendung selber und bezahlt gemäss folgender ausgehandelter Tabelle ("Anz. i.O." ist die Anzahl der einwandfreien Chips im Paket):

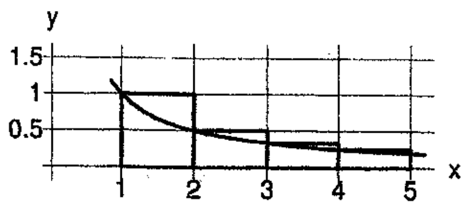
Anz. i.O.:	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Preis pro Paket:	Fr. 160.-	Fr. 90.-	Fr. 40.-	Fr. 10.-	Fr. 0.-

Welchen Preis bezahlt der Kunde Goodfaith im Mittel für ein solches Paket?

---

5. Fünf von einander unabhängige Kurzaufgaben:

a) Die Skizze unten hat mit dem Integral $\int_1^{\infty} \frac{1}{x}\,dx$ und mit der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ zu tun.



Berechnen Sie zunächst das Integral. Erklären Sie dann anschaulich mit Hilfe dieser Skizze, ob obige Summe konvergiert oder divergiert.

b) Ist es wahr, dass die Summe von 7 auf einander folgenden natürlichen Zahlen immer durch 7, die Summe von 6 solcher Zahlen aber nie durch 6 teilbar ist?

c) Es scheint, dass die Graphen der Kosinus– und der Tangensfunktion einander rechtwinklig schneiden. Ist das so? Betrachten Sie dazu das Produkt der Ableitungen an der Schnittstelle x_0, ohne dieses x_0 numerisch zu berechnen, und erklären Sie!

d) Zeigen Sie mit Hilfe des Kosinus–Satzes: Das Dreieck mit Seitenlängen 3 cm, 7 cm und 8 cm weist einen **exakten** 60°–Winkel auf.
Andererseits kann **kein** Dreieck mit drei ganzzahligen Seitenlängen einen exakten 30°–Winkel aufweisen. Warum?

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Inkreisradius des Dreiecks A(0/0) B(21/28) C(6/–8).

(Ende)