# Frühjahr 2007

1. Gegeben ist die Gleichung $y = f_t(x) = \left(1 - \frac{x}{t}\right) \cdot \sqrt{x}$ einer Funktion $f_t$, wobei t ein positiver, reeller Parameter ist.

   a) Berechnen Sie $\int_0^t f_t(x)dx$ für t=9 mit Hilfe einer Stammfunktion.

$$\int_0^t \left(1 - \frac{x}{t}\right) \cdot \sqrt{x}dx = \int_0^t \left(\sqrt{x} - \frac{1}{t}x^{\frac{3}{2}}\right) dx = \left[\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5t}x^{\frac{5}{2}}\right]_0^t = \frac{4}{15}t^{\frac{3}{2}} \underset{t=9}{=} \frac{36}{5}$$

   b) Zeigen Sie, dass der Graph von $f_t$ für jedes t immer genau einen Hochpunkt hat, und berechnen Sie seine Koordinaten für t=3.

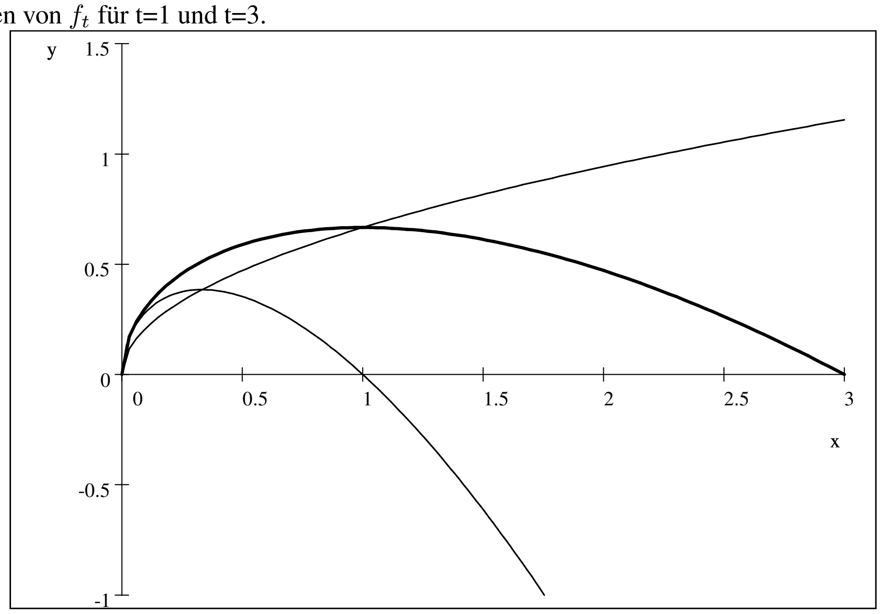
$$\begin{aligned}
f_t(x) &= \left(1 - \frac{x}{t}\right) \cdot \sqrt{x} \\
f_t'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2t}\sqrt{x} \\
f_t''(x) &= -\frac{1}{4x^{\frac{3}{2}}} - \frac{3}{4t\sqrt{x}} \\
f_t'(x) &= \frac{1}{2\sqrt{x}} - \frac{3}{2t}\sqrt{x} = 0 \\
x &= \frac{1}{3}t, y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}t} \\
f_t''\left(\frac{1}{3}t\right) &= -\frac{3}{4}t^{-\frac{3}{2}}\left(\sqrt{3} + 3\right) < 0 \text{ für alle t}
\end{aligned}$$

   Also ein einziges Minimum $Max\left(\frac{1}{3}t \middle| \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}t}\right) \underset{t=3}{=} Max\left(1 \middle| \frac{2}{3}\right)$

   c) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von $f_t$ für t=1 (und x>0) die x-Achse ?

$$\begin{aligned}
f_t(x) &= \left(1 - \frac{x}{t}\right) \cdot \sqrt{x} = 0 \\
x_1 &= 0, x_2 = t \\
f_t'(t) &= -\frac{1}{\sqrt{t}} = \tan\alpha \\
\tan\alpha &= -1 \Rightarrow \alpha = -45^\circ \text{ bzw. } \alpha = 135^\circ
\end{aligned}$$

   d) Zeichnen Sie den Graphen von $f_t$ für t=1 und t=3.




$t = 1 :$ ——

$\mathbf{t = 3}$ :——

$h$ : - - - - - -

e) Die Hochpunkte der Graphen von $f_t$ für verschiedene Werte von t liegen alle auf einer Kurve, die mit der Funktionsgleichung h(x)=... beschrieben werden kann. Geben Sie die Gleichung dieser Funktion h an.

$$Min\left(\frac{1}{3}t\,\middle|\,\frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}t}\right)$$

$$\begin{aligned}
I \quad &: \quad x = \frac{1}{3}t \Rightarrow t = 3x \\
II \quad &: \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}t} \\
\text{I. in II} \quad &: \\
h \quad &: \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{\frac{1}{3}\cdot 3x} = \frac{2}{3}\sqrt{x}
\end{aligned}$$

2. Die Abbildung f mit der Gleichung $w = f(z) = (5-12i)\cdot z - 8i$ ordnet jedem komplexen Argument z einen komplexen Funktionswert w zu.

a) Berechnen Sie den Funktionswert w in Normalform, wenn $z = 2+3i$ ist.

$$\begin{aligned} w &= f(z) = (5-12i)\cdot(2+3i) - 8i \\ w &= 46 - 17i \end{aligned}$$

b) Die Abbildung f lässt sich umkehren; wie heisst die Gleichung ihrer Umkehrfunktion f*

$$\begin{aligned} w &= (5-12i)\cdot z - 8i \\ z &= \frac{w+8i}{5-12i} \\ z &= \frac{(w+8i)\cdot(5+12i)}{(5-12i)\cdot(5+12i)} \\ z &= \frac{(5+12i)\,w - (96-40i)}{169} \\ z &= \frac{1}{169}\,(5+12i)\,w - \frac{1}{169}\,(96-40i) \\ w &= \frac{1}{169}\,(5+12i)\,z - \frac{1}{169}\,(96-40i) \end{aligned}$$

c) Berechnen Sie allgemein für die komplexen Zahlen $z_1$ und $z_2$ (mit $z_1 \neq z_2$) den Term $\frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|}$ und vereinfachen Sie diesen so weit wie möglich.

$$\begin{aligned} \frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|} &= \frac{|(5-12i)\cdot z_1 - 8i - ((5-12i)\cdot z_2 - 8i)|}{|z_1-z_2|} \\ \frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|} &= \frac{|(5-12i)\,z_1 - (5-12i)\,z_2|}{|z_1-z_2|} \\ \frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|} &= \frac{|5\,(z_1-z_2) - 12i\,(z_1-z_2)|}{|z_1-z_2|} \\ \frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|} &= \frac{|(5-12i)\,(z_1-z_2)|}{|z_1-z_2|} = \frac{|(5-12i)|\,|(z_1-z_2)|}{|z_1-z_2|} \\ \frac{|f(z_1)-f(z_2)|}{|z_1-z_2|} &= |(5-12i)| = 13 \end{aligned}$$

d) Beschreiben Sie die Punktmenge in der komplexen Zahlenebene, auf welche die reelle Achse durch diese Abbildung f abgebildet wird, möglichst präzis.

$$\begin{aligned} w &= f(z) = (5-12i)\cdot z - 8i \\ z &= x + i\cdot y \\ w &= (5-12i)\cdot(x+i\cdot y) - 8i \\ w &= 5x + 12y + i\,(5y - 12x - 8) \\ I &: u = 5x + 12y \\ II &: v = -12x + 5y - 8 \\ \text{reelle Achse} &: \text{ y=0} \\ I &: u = 5x \\ II &: v = -12x - 8 \\ \text{I in II} &: \\ v &= -\frac{12}{5}u - 8 \end{aligned}$$

Das Bild der reellen Achse ist ebenfalls eine Gerade (mit der Steigung $-\frac{12}{5}$ und der Verschiebung -8).

e) Ein gewisser Kreis k in der komplexen Zahlenebene, der die reelle Achse berührt, wird durch die Abbildung f auf einen konzentrischen Kreis k' abgebildet. Berechnen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Bildkreises k'.

Wenn der Bildkreis konzentrisch zum Urbildkreis ist, dann sind M und M' identisch, werden also durch die Abbildung nicht verändert :

$$\begin{aligned} f(z) &= z \\ (5-12i)\cdot z - 8i &= z \\ z &= -\frac{3}{5}+\frac{1}{5}i \end{aligned}$$

Der Mittelpunkt der Kreis liegt also bei $M = M'\left(-\frac{3}{5}\,\middle|\,\frac{1}{5}\right)$.
Da M die reelle Achse berührt ist der $r = \frac{1}{5}$ und der Berührpunkt ist $T\left(-\frac{3}{5}\,|0\right)$. Dessen Bildpunkt T' :

$$\begin{aligned} f\left(-\frac{3}{5}\right) &= f(z) = (5-12i)\cdot\left(-\frac{3}{5}\right) - 8i \\ w &= -3-\frac{4}{5}i \end{aligned}$$

Also ist $T'\left(-3\,\middle|-\frac{4}{5}\right)$ und somit $r' = \sqrt{\left(-\frac{3}{5}+3\right)^2+\left(\frac{1}{5}+\frac{4}{5}\right)^2} = \frac{13}{5}$.

3. Eine Kugel S mit Mittelpunkt M(1/2/3) und Radius $r_S = 35$ wird von der Ebene E:2x+3y+6z=173 geschnitten.

a) Geben Sie eine Gleichung der zur Ebene E parallelen Ebene F, die den Kugelmittelpunkt enthält, in Koordinatenform an.

$$\begin{aligned} F &: 2x+3y+6z+d=0 \\ M(1/2/3) \text{ einsetzen} &: \\ F &: 2+6+18+d=0 \\ d &= -26 \\ F &: 2x+3y+6z=26 \end{aligned}$$

b) Welcher Bruchteil der Kugeloberfläche S befindet sich unterhalb der Grundrissebene z=0 ?
Die Kugel befindet sich 3 Einheiten über der xy-Ebene, d.h. die Höhe h der Kugelkappe unterhalb dieser Ebene ist h=35-3=32. Die Fläche einer Kugelkappe zu Radius r und Höhe h ist $O = 2\pi rh$, der prozentuale Anteil also :

$$p = \frac{O}{A} = \frac{2\pi rh}{4\pi r^2} = \frac{1}{2}\frac{h}{r} = \frac{1}{2}\frac{32}{35} = \frac{16}{35} = 45,714\%$$

c) Zeigen Sie, dass der Punkt $A(31/19/z_A)$ auf dem Schnittkreis k der Ebene E mit der Kugel S liegt, und geben Sie seine Koordinate $z_A$ an.

$$\begin{aligned} E &= S \\ 2x+3y+6z-173 &= (x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2-35^2 \\ A(31/19/z_A) \text{ einsetzen} &: \\ 2\cdot 31+3\cdot 19+6z-173 &= (31-1)^2+(19-2)^2+(z-3)^2-35^2 \\ 6z-54 &= z^2-6z-27 \\ z_1 &= 3, z_2 = 9 \\ \text{nur z=9 erfüllt die Ebenen-} &, \text{ bzw. Kugelgleichung separat.} \end{aligned}$$

$A(31/19/9)$.

d) Wie gross ist der Radius $r_k$ dieses Schnittkreises k der Ebene E mit der Kugel S ?
Der Abstand von M zu E ergibt eine Kathete d des Bestimmungsdreiecks für $r_k = \sqrt{r_S^2 - d^2}$. Bestimmung dieses Abstands über die Hesseform von E :

$$\begin{aligned} 2x+3y+6z-173 &= 0 \\ \frac{2x+3y+6z-173}{\sqrt{2^2+3^2+6^2}} &= 0 \\ \frac{2x+3y+6z-173}{7} &= 0 \\ M(1/2/3) \text{ in rechte Seite einsetzen} &: \\ d = \left|\frac{2\cdot 1+3\cdot 2+6\cdot 3-173}{7}\right| &= 21 \\ r_k = \sqrt{r_S^2-d^2} = \sqrt{35^2-21^2} &= 28 \end{aligned}$$

e) Geben Sie den Mittelpunkt M' und den Radius r' der grössten all jener Kugeln an, welche die Kugel S von innen und gleichzeitig auch die Ebene E berühren.
Diese Kugel hat den Radius $r\prime = \frac{r_s+d}{2} = \frac{35+21}{2} = 28$. Ihr Mittelpunkt liegt somit 7 Einheiten von M in Richtung des Normalenvektors von E entfernt.

$$\vec{n} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix}, n = 7$$

Der Normalenvektor hat somit bereits die richtige Länge und man erhält M' :

$$\overrightarrow{r_{M'}} = \overrightarrow{r_M} + \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 9 \end{pmatrix}$$

4. Die Firma Tryhard Ltd. produziert mit zwei Produktionslinien gleiche, optisch ununterscheidbare Speicherchips. Aus langen Testreihen ist bekannt, dass aus der ersten Produktionslinie 80% aller Chips einwandfrei sind, aus der zweiten aber nur gerade 60%.

a) Wie gross ist die WS, dass von 5 aus der ersten Produktionslinie zufällig ausgewählten Chips genau 4 einwandfrei sind ?

$$WS = B(5;4;0,8) = \binom{5}{4} 0.8^4 0.2 = 40,96\%$$

b) Wie viele Chips der zweiten Produktionslinie müssen zufällig ausgewählt werden, damit mit einer WS von über 99,9% mindestens einer einwandfrei ist ?

$$\begin{aligned}
WS\,(\text{mindestens einer einwandfrei}) &> 0.999 \\
1 - WS\,(\text{keiner einwandfrei}) &> 0.999 \\
WS\,(\text{keiner einwandfrei}) &> 0.001 \\
B\,(n;0;0,4) &< 0.001 \\
0.4^n &< 0.001 \\
n &> \frac{\log 0.001}{\log 0.4} = 7,5388 \\
n &\geq 8
\end{aligned}$$

c) Ein Behälter enthält 125 Chips aus der ersten und 85 Chips aus der zweiten Produktion. Ein Chip wird zufällig ausgewählt und getestet. Er ist einwandfrei. Wie gross ist die WS, dass er aus der zweiten Produktionslinie stammt?

$$\begin{aligned}
WS\,(\text{zweite Produktion}|\text{einwandfrei}) &= \frac{WS\,(o.k.|2.)}{WS\,(o.k.)} = \frac{WS\,(o.k.|2)}{WS\,(o.k.|2) + WS\,(o.k.|1)} \\
WS\,(\text{zweite Produktion}|\text{einwandfrei}) &= \frac{\frac{85}{210}\cdot 0.6}{\frac{85}{210}\cdot 0.6 + \frac{125}{210}\cdot 0.8} = \frac{0.24286}{0.71905} = 33,77\%
\end{aligned}$$

d) Wie viele Chips aus der ersten Produktion müssen zufällig ausgewählt werden, damit mit einer WS von mindestens 99,9% mindestens zwei Chips einwandfrei sind ? Lösen Sie die Aufgabe mit einer kleinen Tabelle!

$$\begin{aligned}
WS\,(\text{mindestens zwei einwandfrei}) &\geq 0.999 \\
1 - (WS\,(\text{keiner einwandfrei}) + WS\,(\text{einer einwandfrei})) &\geq 0.999 \\
WS\,(\text{keiner einwandfrei}) + WS\,(\text{einer einwandfrei}) &\leq 0.001 \\
B\,(n;0;0,2) + B\,(n;1;0,2) &\leq 0.001 \\
0.2^n + \binom{n}{1} 0.2^{n-1} 0.8 &\leq 0.001 \\
0.2^n + n\cdot\frac{0.2^n}{0.2} 0.8 &\leq 0.001 \\
0.2^n\,(1+4n) &\leq 0.001
\end{aligned}$$

| $n$ | 10 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|
| $0.2^n\,(1+4n)$ | $4.1984 \times 10^{-6}$ | 0.00672 | 0.0016 | $3.712 \times 10^{-4}$ |

e) Der Kunde Goodfaith Ltd. bestellt immer Pakete mit 4 Chips aus der zweiten Produktion, testet die Sendung selber und bezahlt gemäss folgender ausgehandelter Tabelle ("Anz. i.O." ist die Anzahl der einwandfreien Chips im Paket) :

| **Anzahl i.O.** | **4** | **3** | **2** | **1** | **0** |
|---|---|---|---|---|---|
| **Preis pro Paket in Fr.** | 160 | 90 | 40 | 10 | 0 |

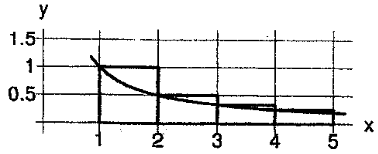
Welchen Preis bezahlt der Kunde im Mittel für ein solches Paket ?
Dies ist der Erwartungswert mit den obigen Gewichtungen

$(p(x_i) : WS\ f\ddot{u}r\ Anzahl\ x_i\ in\ Ordnung$ und $P(x_i)$ der jeweilige Preis):

$$
\begin{aligned}
E(x) &= \sum_{i=0}^{4} p(x_i) \cdot P(x_i) \\
E(x) &= \sum_{i=0}^{4} B(4; i; 0,6) \cdot P(x_i) \\
\text{da } P(0) &= 0 : \\
E(x) &= \sum_{i=1}^{4} B(4; i; 0,6) \cdot P(x_i) \\
E(x) &= \sum_{i=1}^{4} \binom{4}{i} 0.6^i \cdot 0.4^{4-i} \cdot P(x_i) \\
E(x) &= 0.153\,6P(x_1) + 0.345\,6P(x_2) + 0.345\,6P(x_3) + 0.129\,6P(x_4) \\
E(x) &= 0.153\,6 \cdot 10 + 0.345\,6 \cdot 40 + 0.345\,6 \cdot 90 + 0.129\,6 \cdot 160 \\
E(x) &= 67.\,2
\end{aligned}
$$

5. Fünf von einander unabhängige Kurzaufgaben :

a) Die Skizze unten hat mit dem Integral $\int_1^\infty \frac{1}{x}dx$ und mit der Summe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ zu tun.




Berechnen Sie zunächst das Integral. Erklären Sie dann anschaulich mit Hilfe der Skizze ob obige Summer konvergiert oder divergiert.

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}dx = [\ln x]_1^\infty = \infty$$

Die Skizze zeigt $\frac{1}{x}$ und die Treppen von $\frac{1}{k}$. Offensichtlich ist 1/x eine untere Abschätzung von 1/k. Wenn also die Fläche unterhalb von 1/x im Bereich von 1 bis $\infty$ nicht beschränkt ist, wie das obige Integral zeigt, so ist es die Summe über 1/k von 1 bis $\infty$ ebenfalls nicht.

b) Ist es wahr, dass die Summe von 7 aufeinanderfolgenden natürlichen Zahlen immer durch 7, die Summe von 6 solcher Zahlen aber nie durch 6 teilbar ist ?

$$\begin{aligned} S_7 &= \sum_{n=k}^{k+6} n \\ S_7 &= 7k + 21 = 7 \cdot (k+3) \end{aligned}$$

Dies ist mit Sicherheit immer durch 7 teilbar.

$$\begin{aligned} S_6 &= \sum_{n=k}^{k+5} n \\ S_6 &= 6k + 15 = 6\,(k+2) + 3 \end{aligned}$$

Dies ist nur mit Rest 3 durch 6 teilbar, also nie glatt durch 6 zu teilen.

c) Es scheint, dass der Graph der Cosinus- und der Tangensfunktion einander rechtwinklig schneiden. Ist das so ? Betrachten Sie dazu das Produkt der Ableitungen and der Schnittstelle $x_0$, ohne dieses $x_0$ numerisch zu berechnen, und erklären Sie. Wenn zwei Graphen sich rechtwinklig schneiden, so ist das Produkt ihrer Ableitungen an der Schnittstelle gleich -1 :

$$\begin{aligned} (\cos x)' \cdot (\tan x)' &= -1 \\ -\sin x \cdot \frac{1}{\cos^2 x} &= -1 \\ \frac{\sin x}{\cos x} \cdot \frac{1}{\cos x} &= 1 \\ \frac{\tan x}{\cos x} &= 1 \\ \tan x &= \cos x \end{aligned}$$

Also ist die Bedingung für die Rechtwinkligkeit gleichbedeutend mit der Schnittpunktsbedingung. Cosinus und Tangens schneiden sich also rechtwinklig.

d) Zeigen Sie mit Hilfe des Cosinus-Satzes : Das Dreieck mit den Seitenlängen 3cm, 7cm und 8cm weist einen **exakten** 60°-Winkel auf. Sei a=3, b=7 und c=8 :

$$\begin{aligned} \cos\beta &= \frac{b^2 - a^2 - c^2}{-2ac} \\ \cos\beta &= \frac{49 - 9 - 65}{-2 \cdot 3 \cdot 8} = \frac{1}{2} \\ & \text{also } \beta \text{ exakt } 60\,^\circ \end{aligned}$$

Anderseits kann **kein** Dreieck mit drei ganzzahligen Seitenlängen einen exakten 30°-Winkel aufweisen. Warum?

In diesem Fall müsste gelten (Bezeichnungen wie oben) :

$$\begin{aligned}
\cos\beta &= \frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac} \\
\cos 30^\circ &= \frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac} \\
\frac{1}{2}\sqrt{3} &= \frac{b^2-a^2-c^2}{-2ac} \\
\sqrt{3} &= \frac{a^2+c^2-b^2}{ac}
\end{aligned}$$

Auf der rechten Seite steht im Zähler mit Sicherheit eine ganze Zahl, ebenso im Nenner. Der Bruch ist also aus der Menge der rationalen Zahlen.
Auf der linken Seite steht aber eine irrationale Zahl. Dies kann nicht gleich einem Bruch sein. Also gibt es kein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen, das einen exakten 30°-Winkel bildet (auch kein Dreieck mit Seitenlängen aus $\mathbb{Q}$, für das dies zutreffen könnte).

e) Berechnen Sie den Flächeninhalt und den Inkreisradius des Dreiecks A(0/0), B(21/28) und C(6/-8).

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}b\cdot c\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin\alpha \\
\cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AB}}{AC\cdot AB} = \frac{\begin{pmatrix}-6\\8\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-21\\-28\end{pmatrix}}{\sqrt{6^2+8^2}\cdot\sqrt{21^2+28^2}} \\
\cos\alpha &= \frac{-98}{10\cdot 35} = -\frac{7}{25} \\
\alpha &= 106,26^\circ \\
A &= \frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 35\cdot\sin\left(106,26^\circ\right) = 168 \\
&\phantom{=}\ \text{Das glatte Ergebnis legt nahe das es exakt 168 sind} \\
A &= \frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sin\alpha = A = \frac{1}{2}AC\cdot AB\cdot\sqrt{1-\cos^2\alpha} \\
A &= \frac{1}{2}\cdot 10\cdot 35\cdot\sqrt{1-\left(-\frac{7}{25}\right)^2} = 175\cdot\sqrt{\frac{576}{625}} = 175\cdot\frac{24}{25} = 168 \\
&\phantom{=}\ \text{also exakt.}
\end{aligned}$$

Der Inkreismittelpunkt zerlegt das Dreieck in drei Teile, deren Fläche die Gesamtfläche ergeben und alle die gleiche Höhe $r_i = r$ haben :

$$\begin{aligned}
A &= \frac{1}{2}r\left(a+b+c\right) \\
r &= \frac{2A}{a+b+c} \\
a &= \left|\overrightarrow{BC}\right| = \left|\begin{pmatrix}-15\\-36\end{pmatrix}\right| = 39 \\
r &= \frac{2\cdot 168}{10+35+39} = 4
\end{aligned}$$