Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Frühling 2008 Zürich Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner ohne Computer–Algebra–System.
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall klar ersichtlich und wo nötig kommentiert sein.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite.

---

1. Für jeden Wert des reellen Parameters k ist mit $f_k(x) = (x+k)\cdot e^{-x}$ eine Funktion f_k definiert. Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass jede dieser Funktionen genau einen Hochpunkt H hat.

a) Bestimmen Sie allgemein die (von k abhängigen) Koordinaten von H.

b) Geben Sie die Funktionsgleichung $h(x) = ...$ derjenigen Kurve an, auf der alle diese Hochpunkte H liegen.

c) Unter welchem Winkel (auf ganze Grade gerundet) schneidet der Graph von f_k die x-Achse, wenn k = 1 gewählt wird?

d) Bestimmen Sie allgemein die (von k abhängigen) Koordinaten des einzigen Wendepunktes W, und beweisen Sie, dass dieser Punkt tatsächlich ein Wendepunkt ist.

e) Zeigen Sie, dass $F_k(x) = (1+k+x)\cdot(-e^{-x})$ für jedes k eine Stammfunktion von f_k ist, und berechnen Sie damit $\int_{x_0}^{\infty} f_k(x)\,dx$, wobei x_0 die (einzige) Nullstelle von f_k ist.

---

2. Die Funktion f mit der Gleichung $w = f(z) = (3 + 4\,i)\cdot z - 10\,i$ bildet die gesamte Gauss'sche Zahlenebene auf sich selbst ab. Resultate in Normalform (a + i b, mit a, b $\in \mathbb{R}$), Geradengleichungen in der Form $\mathrm{Im}(z) = u \cdot \mathrm{Re}(z) + v$ (mit u, v $\in \mathbb{R}$) angeben:

a) Berechnen Sie alle Fixpunkte dieser Abbildung.

b) Wie heisst die Gleichung der Umkehrfunktion $\overline{f}$ von f ?

c) Die Gerade g: Im(z) = Re(z) wird durch f auf eine Punktmenge M abgebildet. Geben Sie die Gleichung dieser Punktmenge M an.

d) Zeigen Sie, dass für beliebige Zahlen z_1 und z_2 gilt: $|z_2 - z_1| = k \cdot |f(z_2) - f(z_1)|$, und bestimmen Sie die Konstante k.

e) Wie muss der Radius eines Kreises mit Mittelpunkt z = 5 + 7i gewählt werden, damit er seinen Bildkreis von aussen berührt?

---

3. Eine erste Kugel k_1 mit Mittelpunkt M_1, Radius r_1 und der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 175^2$ schneidet eine zweite Kugel k_2 mit Mittelpunkt M_2 (112 / 168 / 336) und Radius r_2 = 273.

a) Wie gross ist der Durchmesser d einer dritten, möglichst grossen Kugel k_3, die sich sowohl innerhalb der ersten als auch innerhalb der zweiten Kugel befindet?

(Bitte wenden!)

(Fortsetzung von 3.:)

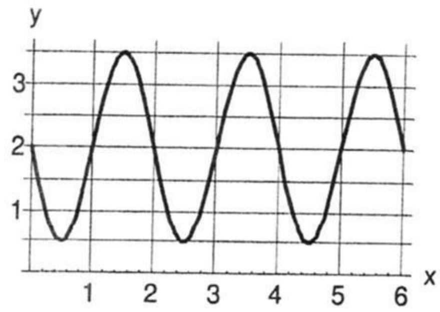
b) Der Punkt P (58 / 150 / 69) liegt auf dem Schnittkreis der beiden Kugeln k_1 und k_2. Zeigen Sie dies, und geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, in der dieser Kreis liegt.
c) Berechnen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Schnittkreises der beiden Kugeln k_1 und k_2.
d) Vom Punkt Q (327 / 348 / 456) aus werden alle Tangenten an die zweite Kugel k_2 gelegt. Wie lang sind die Tangentenstücke von Q bis zum jeweiligen Berührungspunkt?
e) Der Punkt R (85 / 138 / 66) liegt ebenfalls auf dem Schnittkreis der beiden Kugeln k_1 und k_2, was als gegeben angenommen werden darf. Bestimmen Sie eine Gleichung der gemeinsamen Tangente t durch diesen Punkt R an diese beiden Kugeln.

---

4. Eine Firma stellt spezielle Stahlfedern für die Automobilindustrie her. Aus dem Produktionsprozess ist bekannt, dass im langjährigen Mittel genau 7 von 8 dieser Federn die strenge Qualitätsprüfung bestehen. Alle Federn werden zufällig ausgewählt:
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 8 Federn genau 7 die Prüfung bestehen werden?
b) Jeweils 112 ungeprüfte Federn werden zusammen in einen Container verpackt und an die Kunden ausgeliefert. Bestimmen Sie den Mittelwert und die Standardabweichung der Anzahl Federn pro Container, die die Prüfung bestehen werden.
c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 24 Federn mindestens 21 die Prüfung bestehen?
d) Die Mitarbeitenden der Firma dürfen an folgendem Spiel teilnehmen: Nach Bezahlen eines Einsatzes in die Kaffeekasse werden drei Federn ausgewählt und anschliessend geprüft. Dann wird für jede Feder, die die Prüfung bestanden hat, eine Zehnfrankennote zurückgegeben. Wie hoch ist der faire Einsatz für dieses Spiel?
e) Wie viele Federn müssen geprüft werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens 12 darunter sind, die die Prüfung bestehen werden?

---

5. Fünf von einander unabhängige Kurzaufgaben:



a) In der Skizze links ist der Graph einer verschobenen, in der x–Richtung zusammengedrückten und in der y–Richtung gestreckten Sinus–Kurve dargestellt. Wie lautet ihre Funktionsgleichung (mit x im Bogenmass)?

b) Für welche $x \in [0, 2\pi]$ konvergiert die Reihe $1 + \tan(x) + (\tan(x))^2 + (\tan(x))^3 + \ldots$?

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{3x^2}{2e^x - 2x - 2}$ mit der Regel von de L'Hospital.

d) Anna meint, dass $F_1(x) = \sin^2(x)$ Stammfunktion von $f(x) = 2\sin(x)\cos(x)$ sei; Berta hingegen glaubt, dass das für die Funktion $F_2(x) = -\cos^2(x)$ zutreffe. $F_1(x)$ und $F_2(x)$ sind offensichtlich verschiedene Funktionen. Wer hat Recht? Erklären Sie ausführlich!

e) Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass $n^3 + 5n$ für jede natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist.

(Ende)