Frühjahr 2008

1. Für jeden Wert des reellen Parameters k ist mit $f_k(x) = (x+k)e^{-x}$ eine Funktion f_k definiert. Es darf als bekannt vorausgesetzt werden, dass jede dieser Funktionen genau einen Hochpunkt H hat.

   a) Bestimmen Sie allgemein die von k abhängigen Koordinaten von H.

$$\begin{aligned} f_k\prime(x) &= (1-k-x)\,e^{-x} \\ f_k\prime(x) &= 0 \\ x &= 1-k \\ y &= e^{k-1} \end{aligned}$$

   $H(1-k|e^{k-1})$

   b) Geben Sie die Funktionsgleichung h(x)=... derjenigen Kurve an, auf der alle diese Hochpunkte liegen.

$$\begin{aligned} x &= 1-k \\ k &= 1-x \\ y &= e^{k-1} \\ h &: \; y = e^{-x} \end{aligned}$$

   c) Unter welchem Winkel (auf ganze Grade gerundet) schneidet der Graph von f_k die x-Achse, wenn k=1 gewählt wird?

$$\begin{aligned} f_1(x) &= (x+1)e^{-x} = 0 \\ x &= -1 \\ \tan\alpha &= f_1\prime(-1) = e \\ \alpha &= 70^\circ \end{aligned}$$

   d) Bestimmen Sie allgemein die Koordinaten des einzigen Wendepunktes W, und beweisen Sie, dass dieser Punkt tatsächlich ein Wendepunkt ist.

$$\begin{aligned} f_k\prime\prime(x) &= (k-2+x)\,e^{-x} \\ f_k\prime\prime\prime(x) &= (3-k-x)\,e^{-x} \\ f_k\prime\prime(x) &= (k-2+x)\,e^{-x} = 0 \\ x &= 2-k \\ y &= 2e^{k-2} \\ f_k\prime\prime\prime(2-k) &= e^{k-2} \neq 0, \text{ also WP} \end{aligned}$$

   $W(2-k|2e^{k-2})$

   e) Zeigen Sie, dass $F_k(x) = (1+k+x)(-e^{-x})$ für jedes k eine Stammfunktion von f_k ist, und berechnen Sie damit $\int_{x_0}^{\infty} f_k(x)dx$, wobei x_0 die einzige Nullstelle von f_k ist.

$$\begin{aligned} F_k\prime(x) &= \frac{k}{e^x} + \frac{x}{e^x} = (k+x)\,e^{-x} = f_k(x) \\ f_k(x) &= (x+k)e^{-x} = 0 \\ x &= -k \\ \int_{-k}^{\infty} f_k(x)dx &= \left[-(1+k+x)e^{-x}\right]_{-k}^{\infty} = e^k \end{aligned}$$

2. Die Funktion f mit der Gleichung $w = f(z) = (3+4i)z - 10i$ bildet die gesamte Gauss'sche Zahlenebene auf sich selbst ab. Resultat in Normalform (a+ib, a,b $\in \mathbb{R}$), Geradengleichungen in der Form Im(z)=uRe(z)+v (mit u,v $\in \mathbb{R}$) angeben:

a) Berechnen Sie alle Fixpunkte dieser Abbildung.

$$\begin{aligned} f(z) &= z \\ (3+4i)z - 10i &= z \\ z &= \frac{10i}{2+4i} \\ z &= 2+i \end{aligned}$$

b) Wie heisst die Gleichung der Umkehrfunktion $\overline{f}$ von f ?

$$\begin{aligned} w &= (3+4i)z - 10i \\ z &= (3+4i)w - 10i \\ w &= \frac{z+10i}{3+4i} \\ \overline{f} &: \quad w = \frac{1}{25}(3-4i)\,z + \frac{1}{5}(8+6i) \end{aligned}$$

c) Die Gerade g:Im(z)=Re(z) wird durch f auf eine Punktmenge M abgebildet. Geben Sie die Gleichung dieser Punktmenge M an.

$$\begin{aligned} g &: \quad z = k(1+i), k \in \mathbb{R} \\ f(g) &= (3+4i)k(1+i) - 10i \\ f(g) &= -(1-7i)\,k - 10i \\ \mathrm{Im}(f(g)) &= 7k - 10 \\ \mathrm{Re}(f(g)) &= -k \\ \overline{g} : \mathrm{Im}(w) &= -7\,\mathrm{Re}(w) - 10 \end{aligned}$$

d) Zeigen Sie, dass für beliebige Zahlen z_1 und z_2 gilt : $|z_2 - z_1| = k\,|f(z_2) - f(z_1)|$ und bestimmen Sie die Konstante k.

$$\begin{aligned} |f(z_2) - f(z_1)| &= |(3+4i)z_2 - 10i - ((3+4i)z_1 - 10i)| \\ |f(z_2) - f(z_1)| &= |(3+4i)z_2 - (3+4i)z_1| \\ |f(z_2) - f(z_1)| &= |(3+4i)\,(z_2 - z_1)| = |(3+4i)|\,|(z_2 - z_1)| \\ |f(z_2) - f(z_1)| &= 5\,|(z_2 - z_1)| \\ k &= 1/5 \end{aligned}$$

e) Wie muss der Radius eines Kreises mit Mittelpunkt z=5+7i gewählt werden, damit er seinen Bildkreis von aussen berührt?

$$\begin{aligned} f(5+7i) &= -13 + 31i = m_2 \\ m_1 &= 5+7i \\ |m_1 m_2| &= 30 \end{aligned}$$

Der Berührpunkt hat den Abstand r_1 zu m_1 und r_2 zu m_2. Nach Teilaufgabe d) wissen wir, dass der Abstand durch die Funktion f ver-fünffacht wird, also ist $r_2=5r_1$. Somit teilt B m_1m_2 im Verhältnis 1:5. Er liegt somit bei B(2|11) und r_1=5.

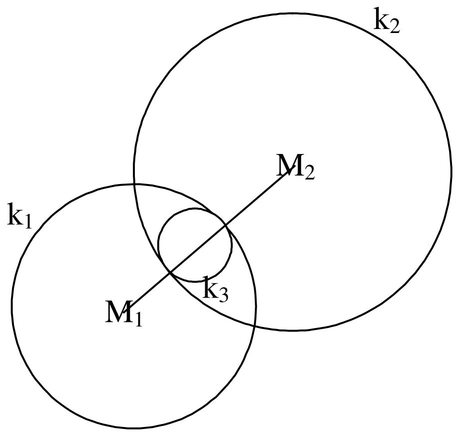


Figure 1:

3. Eine erste Kugel k_1 mit Mittelpunkt M_1, Radius r_1 und der Gleichung $x^2 + y^2 + z^2 = 175^2$ schneidet eine zweite Kugel k_2 mit Mittelpunkt $M_2(112|168|336)$ und Radius $r_2 = 273$.
   a) Wie gross ist der Durchmesser d einer dritten, möglichst grossen Kugel k_3, die sich sowohl innerhalb der ersten, als auch der zweiten Kugel befindet ?
   Der Durchmesser ist der Abstand der beiden einander am nähesten liegenden Schnittpunkte von g: M_1M_2 mit den beiden Kugeln ($M_1(0|0|0)$)

$$\begin{aligned}
g &: \overrightarrow{X} = k \begin{pmatrix} 112 \\ 168 \\ 336 \end{pmatrix} \\
g \cap k_1 &: \\
k^2 \left(112^2 + 168^2 + 336^2\right) &= 175^2 \\
k_{1/2} &= \pm\frac{25}{56} \\
k_2 : (x-112)^2 + (y-168)^2 + (z-336)^2 &= 273^2 \\
g \cap k_2 &: \\
(k-1)^2 \left(112^2 + 168^2 + 336^2\right) &= 273^2 \\
k_3 = \frac{17}{56}, k_4 &= \frac{95}{56}
\end{aligned}$$

   Am nächsten liegen sich k_2 und k_3 :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{X_2} &= \begin{pmatrix} 50 \\ 75 \\ 150 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{X_3} &= \begin{pmatrix} 34 \\ 51 \\ 102 \end{pmatrix} \\
d &= \left|\overrightarrow{X_2X_3}\right| = 56
\end{aligned}$$

   Oder (Elias Villiger):$d = r_1 + r_2 - M_1M_2 = 448 - 392 = 56$

   b) Der Punkt P(58/150/69) liegt auf dem Schnittkreis der beiden Kugeln k_1 und k_2. Zeigen Sie dies, und geben Sie eine Gleichung der Ebene E an, in der dieser Kreis liegt.

$$\begin{aligned}
M_1P &= \sqrt{58^2 + 150^2 + 69^2} = 175 = r_1 \\
M_2P &= \sqrt{(112-58)^2 + (168-150)^2 + (69-336)^2} = 273 = r_2
\end{aligned}$$

also liegt P auf beiden Kugeln und somit auf dem Schnittkreis.
$\overrightarrow{M_1M_2}$ ist ein Normalenvektor der gesuchten Ebene. P ein Punkt in ihr :

$$\begin{aligned}
112x + 168y + 336z + d &= 0 \\
\text{P in E} &: \\
112 \cdot 58 + 168 \cdot 150 + 336 \cdot 69 + d &= 0 \\
d &= -54\,880 \\
E : 112x + 168y + 336z - 54\,880 &= 0
\end{aligned}$$

c) Berechnen Sie den Mittelpunkt M und den Radius r des Schnittkreises der beiden Kugeln k_1 und k_2.
Der Mittelpunkt M ist Schnittpunkt von g: M_1M_2 mit E :

$$\begin{aligned}
E &: 112 \cdot 112 \cdot k + 168 \cdot 168 \cdot k + 336 \cdot 336 \cdot k - 54\,880 = 0 \\
k &= \frac{5}{14} \\
\overrightarrow{X_M} &= \begin{pmatrix} 40 \\ 60 \\ 120 \end{pmatrix} \\
r &= MP = \sqrt{(58-40)^2 + (150-60)^2 + (69-120)^2} = 105
\end{aligned}$$

d) Vom Punkt Q(327/348/456) aus werden alle Tangenten an die zweite Kugel k_2 gelegt. Wie lang sind die Tangentenstücke von Q zum jeweiligen Berührpunkt ?

$$\begin{aligned}
QT &= \sqrt{QM_2^2 - r_2^2} \\
QT &= \sqrt{(327-112)^2 + (348-168)^2 + (456-336)^2 - 273^2} \\
QT &= 136
\end{aligned}$$

e) Der Punkt R(85/138/66) liegt ebenfalls auf dem Schnittkreis der beiden Kugeln k_1 und k_2, was als gegeben angenommen werden darf. Bestimmen Sie die Gleichung der gemeinsamen Tangente t durch diesen Punkt R an diese beiden Kugeln.

$$\begin{aligned}
R &\in E : \\
(85-40)^2 + (138-60)^2 + (66-120)^2 &= 105^2 \\
11\,025 &= 11025
\end{aligned}$$

Der Richtungsvektor $\overrightarrow{v}$ von t muss senkrecht zu M_1M_2R stehen :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{M_1M_2} &= \begin{pmatrix} 112 \\ 168 \\ 336 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{M_1R} &= \begin{pmatrix} 85 \\ 138 \\ 66 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{v} &= \overrightarrow{M_1M_2} \times \overrightarrow{M_1R} \\
\overrightarrow{v} &= \begin{pmatrix} -35\,280 \\ 21\,168 \\ 1176 \end{pmatrix} \tilde{} \begin{pmatrix} -30 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix} \\
t &: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 85 \\ 138 \\ 66 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} -30 \\ 18 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

4. Eine Firma stellt spezielle Stahlfedern für die Automobilindustrie her. Aus dem Produktionsprozess ist bekannt, dass im langjährigen Mittel genau 7 von 8 dieser Federn die strenge Qualitätsprüfung bestehen. Alle Federn werden zufällig ausgewählt:

a) Wie gross ist die WS, dass von 8 Federn genau 7 die Prüfung bestehen werden?

$$WS = \binom{8}{7}\left(\frac{7}{8}\right)^7 \frac{1}{8} = \frac{823\,543}{2097\,152} = 39,27\%$$

b) Jeweils 112 ungeprüfte Federn werden zusammen in einem Container verpackt und an die Kunden ausgeliefert. Bestimmen Sie Mittelwert und Standardabweichung der Anzahl Federn pro Container, die die Prüfung bestehen werden.

$$\begin{aligned} \mu &= n \cdot p = 112 \cdot \frac{7}{8} = 98 \\ \sigma &= \sqrt{n \cdot p \cdot q} = \sqrt{98 \cdot \frac{1}{8}} = 3.5 \end{aligned}$$

c) Wie gross ist die WS, dass von 24 Federn mindestens 21 die Prüfung bestehen?

$$WS = \sum_{i=21}^{24} \binom{24}{i}\left(\frac{7}{8}\right)^i \left(\frac{1}{8}\right)^{24-i} = \frac{3058\,038\,605\,855\,979\,938\,325}{4722\,366\,482\,869\,645\,213\,696} = 64,76\%$$

d) Die Mitarbeiter der Firma dürfen an folgendem Spiel teilnehmen : Nach Bezahlen eines Einsatzes in die Kaffeekasse werden drei Federn ausgewählt und anschliessend geprüft. Dann wird für jede Feder, die die Prüfung bestanden hat, eine Zehnfrankennote zurückgegeben. Wie hoch ist der faire Einsatz für dieses Spiel?

$$\mu = \sum_{i=0}^{3} 10i\binom{3}{i}\left(\frac{7}{8}\right)^i \left(\frac{1}{8}\right)^{3-i} = \frac{105}{4} = 26,25$$

Oder (Elias Villiger): Der Erwartungswert bei einmal Ziehen eine gute Feder zu ziehen ist 7/8.
Der Erwartungswert bei dreimal Ziehen eine gute Feder zu ziehen ist also 3 * 7/8.
Mit einem Gewinn von 10.- pro gute Feder muss der Einsatz also 10 * 3 * 7/8 = 26.25 betragen.

e) Wie viele Federn müssen geprüft werden, damit mit einer WS von über 99% mindestens 12 darunter sind, die die Prüfung bestehen werden?
Wenn man den Erwartungswert mit einem 3σ Intervall umgibt, werden mehr als 99% (99.8%) aller Ergebnisse darin liegen. Für die untere Grenze des Intervalls sollte also gelten :

$$\begin{aligned} 12 &= \mu - 3\sigma \\ 12 &= n \cdot p - 3\sqrt{n \cdot p \cdot q} \\ 12 &= \frac{7}{8}n - 3\sqrt{n\frac{7}{64}} \\ n &= 18,605 \end{aligned}$$

Probe :

$$\sum_{i=12}^{18} \binom{18}{i}\left(\frac{7}{8}\right)^i \left(\frac{1}{8}\right)^{18-i} = 99,57\%$$

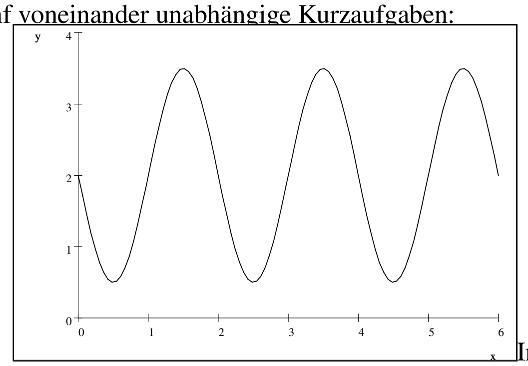
ergibt schon mehr als 99%

$$\sum_{i=12}^{17} \binom{17}{i}\left(\frac{7}{8}\right)^i \left(\frac{1}{8}\right)^{17-i} = 98,62\%$$

ergibt weniger

Es müssten 18 Federn geprüft werden.

5. Fünf voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

a) 

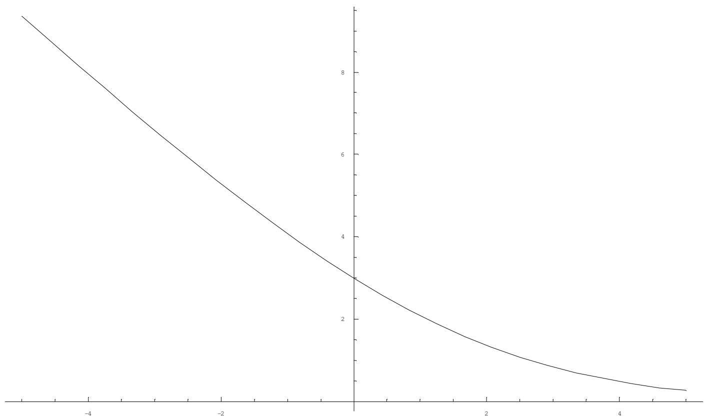
In der Skizze links ist der Graph einer verschobenen, in der x-Richtung zusammengedrückten und in der y-Richtung gestreckten Sinus-Kurve dargestellt. Wie lautet ihre Funktionsgleichung (x in Bogenmass)?

$$y = -1,5\sin(\pi x) + 2$$

b) Für welche $x \in [0, 2\pi]$ konvergiert die Reihe $1 + \tan(x) + \tan^2(x) + \tan^3(x)...$?
Die geometrische Reihe konvergiert für $|q| < 1$, also hier $|\tan x| < 1$.
Dies ist für $x \in [0; \pi/4[\cup]3/4\pi; 5/4\pi[\cup]7/4\pi; 2\pi]$ der Fall.

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0} \frac{3x^2}{2e^x-2x-2}$ mit der Regel von L 'Hospital

$$\lim_{x\to 0} \frac{3x^2}{2e^x - 2x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{6x}{2e^x - 2} = \lim_{x\to 0} \frac{6}{2e^x} = 3$$



d) Anna meint, dass $F_1(x) = \sin^2 x$ Stammfunktion von $f(x) = 2\sin x\cos x$ sei; Berta hingegen glaubt, dass das für die Funktion $F_2(x) = -\cos^2(x)$ zutreffe. $F_1(x)$ und $F_2(x)$ sind offensichtlich verschiedene Funktionen. Wer hat recht? Erklären Sie ausführlich.
Beide Funktionen sind Stammfunktionen, da $F_1'(x) = 2\sin x\cos x = F_2'(x) = 2\cos x\sin x = f(x)$ ist.
Stammfunktionen haben die gleiche Ableitung, können sich aber um eine Konstante unterscheiden. Da $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$, gilt $-\cos^2 x = \sin^2 x - 1$, also $F_2(x) = F_1(x) - 1$.

e) Zeigen Sie mit einem Induktionsbeweis, dass $n^3 + 5n$ für jede natürliche Zahl n durch 6 teilbar ist.

$$\begin{aligned}
\text{Induktionsanfang} &: \quad n = 1 \\
1^3 + 5 &= \text{6 ist durch 6 teilbar.} \\
\text{Induktionsannahme} &: \quad n^3 + 5n \text{ ist durch 6 teilbar} \\
\text{Induktionsschritt} &: \quad n + 1 \\
(n+1)^3 + 5(n+1) &= n^3 + 3n^2 + 8n + 6 \\
(n+1)^3 + 5(n+1) &= \underbrace{n^3 + 5n}_{\text{nach Voraussetzung durch 6 teilbar}} + \underbrace{6}_{\text{durch 6 teilbar}} + \underbrace{3n^2 + 3n}_{\text{noch zu untersuchen}} \\
3n^2 + 3n &= 3n(n+1)
\end{aligned}$$

Entweder ist n gerade, dann ist n ein Vielfaches von 2 und somit 3n ein Vielfaches von 6, also $3n\left(n+1\right)$ durch 6 teilbar, oder n ist ungerade, dann ist n+1 gerade und es gilt das vorige.

Also sind alle Summanden von $\left(n+1\right)^3+5\left(n+1\right)$ durch 6 teilbar und somit $\left(n+1\right)^3+5\left(n+1\right)$ insgesamt, unter der Voraussetzung, dass n^3+5n ist durch 6 teilbar ist.

Da dies für n=1 gezeigt wurde und ebenso für alle Nachfolger, ist somit bewiesen, dass n^3+5n ist durch 6 teilbar ist.