Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Frühling 2010 Zürich Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner ohne Computer–Algebra–System.
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall klar ersichtlich und wo nötig kommentiert sein.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite.

---

1. Für jeden Wert des reellen Parameters k ist mit $f_k(x) = \ln(x^k)$ eine Funktion f_k definiert.
   a) Wie muss k gewählt werden, damit der Punkt P(e^2 / e) auf dem Graphen von f_k liegt?
   b) Wie muss ein (positives) k gewählt werden, damit der Graph der zugehörigen Funktion f_k die x–Achse unter einem Winkel von 60° schneidet?
   c) Vom Ursprung aus wird die Tangente an den Graphen der Funktion f_k gezeichnet. Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B.
   d) Zeigen Sie, dass $F(x) = k \cdot x \cdot (\ln(x) - 1)$ eine Stammfunktion von $f_k(x)$ ist.
   e) Wie muss k gewählt werden, damit $\int_1^e f_k(x)\,dx = 1$ wird?

---

2. Der Term cos(x) + i sin(x) (mit $i^2 = (-1)$) wird hier mit 'cis(x)' abgekürzt.
   a) Geben Sie die Summe 2 cis(45°) + 2 cis(135°) vereinfacht in Polarform an.
   b) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung z^4 = 16 cis(256°) (ebenfalls in Polarform) an.
   c) Durch die Funktion f mit der Gleichung $w = f(z) = (3 + 4i)\, z + (1 + 2i)$ wird jeder komplexen Zahl z eine komplexe Zahl w zugeordnet. Geben Sie die Gleichung ihrer Umkehrfunktion $\bar{f}$ in der Form $z = \bar{f}(w) = u \cdot w + v$ an; die komplexen Zahlen u und v müssen in Normalform ($u = a + i\,b$, mit $a, b \in \mathbb{R}$; ebenso für v) angegeben werden.
   d) Berechnen Sie den Fixpunkt der oben angegebenen Funktion f in Normalform.
   e) Der Kreis mit Mittelpunkt M = 3 – 2i und Radius r = 2 wird durch f wieder auf einen Kreis abgebildet. Berechnen Sie seinen Mittelpunkt M* und seinen Radius r*.

---

3. Es sind die Punkte A(-4/0/0), B(0/-4/0), C(4/0/0), D(0/4/0) und E(0/0/6) gegeben.
   a) Geben Sie eine Parameterdarstellung der Ebene α[A,B,E] sowie eine kartesische Gleichung der Ebene β[C,D,E] an.
   b) Bestimmen Sie den Zwischenwinkel der Ebenen α und β, auf ganze Grade gerundet.
   c) Bestimmen Sie den Abstand des Ursprungs von derjenigen Normalen der Ebene α, die durch den Punkt Q(7/5/–4) geht.
   d) Mit L(2/2/8) ist auch eine Pyramide ABEL definiert. Berechnen Sie ihr Volumen.

(Bitte wenden!)

(Fortsetzung von Aufgabe 3.:)

e) Berechnen Sie den Schwerpunkt S des Dreiecks ABE. Das Dreieck ABE bilde einen dreieckigen Spiegel, dessen spiegelnde Seite dem Ursprung abgewandt ist. Zeigen und erklären Sie, warum es nicht möglich ist, damit einen von L(2/2/8) nach S verlaufenden Lichtstrahl zu reflektieren.

---

4. Frank und Robert spielen das Spiel „Finger & Faust": Sie halten eine Hand hinter dem Rücken und zeigen sich dann beide gleichzeitig eine gewisse Anzahl gestreckter Finger oder die Faust dieser Hand. Frank gewinnt den Spielzug, wenn die Summe der gezeigten Finger 0, 2 oder 9 beträgt. Robert gewinnt bei 1, 3 oder 10 gezeigten Fingern. In allen anderen Fällen bleibt der Spielzug unentschieden.
   a) Berechnen Sie die Gewinnwahrscheinlichkeiten für Frank und Robert, wenn beide die Wahl der Anzahl gezeigter Finger rein zufällig treffen.
   b) So werden 12 Spielzüge gespielt. Berechnen Sie den Erwartungswert der Zufallsvariablen X, wenn X die Anzahl der von Frank gewonnenen Züge bezeichnet.
   c) Berechnen Sie die Standardabweichung der Zufallsvariablen Y, wenn Y die Anzahl der unentschiedenen Züge bezeichnet.
   d) Es werden n Züge gespielt. Wie gross muss n gewählt werden, damit die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Robert dabei mindestens einmal gewinnt, > 99% wird?
   e) Frank und Robert ändern die Strategie. Robert zeigt jetzt mit Wahrscheinlichkeit q = 0.5 die Faust. Die restlichen Möglichkeiten wählt er je mit gleich grosser Wahrscheinlichkeit. Frank zeigt die Faust mit Wahrscheinlichkeit p und seine restlichen Möglichkeiten ebenfalls je mit gleich grosser Wahrscheinlichkeit. Wie muss er p wählen, um seine Gewinnwahrscheinlichkeit zu optimieren, und wie gross wird diese dann?

---

5. Fünf von einander unabhängige Kurzaufgaben:

a) Der Graph einer Polynomfunktion dritten Grades geht durch den Ursprung und hat im Punkt A(1 / 10) eine horizontale Tangente; er enthält weiter den Punkt B(2 / 2), und im Punkt C(3 / ...) ist die Steigung gleich (–24). Wie heisst die Gleichung dieser Funktion?

b) Für welche $x \in [0, 2\pi]$ konvergiert die Reihe $1 + 2\sin(x) + (2\sin(x))^2 + (2\sin(x))^3 + \ldots$?

c) Bestimmen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{e^{2x} - 1}$ mit der Regel von de L'Hospital.

d) Für welchen positiven Wert von a schneiden sich die Graphen von $y = a\sin(x)$ und $y = a\cos(x)$ unter einem rechten Winkel?

e) Zeigen Sie, dass $3^{2n} + 4^{n+1}$ für jede natürliche Zahl n durch 5 teilbar ist.

(Ende)