Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Frühling 2011 Zürich Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung (gemäss Vorgaben SBF/SMK); TR: Casio FX–82 Solar oder TI–30 eco RS.
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall klar ersichtlich und wo nötig kommentiert sein.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für die Maximalnote 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.
- Beginnen Sie mit der Lösung bei jeder Aufgabe jeweils auf einer neuen Seite.

---

1. Gegeben ist die Funktion f mit der Gleichung $y = f(x) = \ln(x) - (\ln(x))^2$.
   a) Berechnen Sie alle Nullstellen von f sowie die erste Ableitungsfunktion $f'(x)$.
   b) Geben Sie die Koordinaten (x, y) des Punktes A an, in welchem der Graph von f eine horizontale Tangente aufweist.
   c) Sie dürfen als gegeben annehmen, dass der Graph von f genau einen Wendepunkt B hat. Geben Sie die Koordinaten (x, y) von B an.
   d) Zeichnen Sie den Graphen von f für $0 < x < 8$ und $(-3) < y < 1$. Verwenden Sie als Einheit auf beiden Achsen je 4 Häuschen.
   e) Zeigen Sie, dass die Funktion F mit der Gleichung $F(x) = (-3x) + 3x \cdot \ln(x) - x \cdot (\ln(x))^2$ eine Stammfunktion von f ist, und berechnen Sie damit $\int_1^e f(x)\,dx$.

---

2. Durch die Funktionsgleichung $w = f(z) = \frac{3+\sqrt{3}\,i}{4} \cdot z$ wird eine Abbildung der Gauß'schen Zahlenebene auf sich selbst definiert. Weiter sind die Zahlen z_k (mit $k \in \mathbb{N}_0$) wie folgt definiert: $z_0 = 4$, $z_1 = f(z_0)$, $z_2 = f(z_1)$, $z_3 = f(z_2)$, und so weiter.
   a) Geben Sie die Zahl $\frac{3+\sqrt{3}\,i}{4}$ in Polarform (Winkel mit der Einheit °) an. Was für eine Abbildung – geometrisch gesehen – wird durch diese Funktionsgleichung definiert?
   b) Berechnen Sie z_2 in kartesischer Form a + i b, mit exakten Werten für a und b.
   c) Geben Sie für ein allgemeines k eine explizite Definition von z_k in Polarform an, und zeichnen Sie z_0 bis z_6 in der Gauß'schen Zahlenebene ein.
   d) Berechnen Sie allgemein die Länge L_n des Weges $z_0 \to z_1 \to z_2 \to \ldots \to z_n$ sowie den zugehörigen Grenzwert $L = \lim_{n\to\infty} L_n$.
   e) Eine weitere Zahl z_M ist dadurch festgelegt, dass $\frac{z_M}{z_0} = \frac{z_1}{z_M}$ und $\mathrm{Re}(z_M) > 0$ ist. Berechnen Sie z_M in Polarform.

---

3. Gegeben sind die Punkte A(6/5/2), B(6/6/7) und Q(2/17/12).
   a) Wie gross ist der Flächeninhalt **A** des Dreiecks ABQ?
   b) Wie gross ist der Abstand d des Ursprungs O(0/0/0) von der durch A, B und Q definierten Ebene E?

c) Es gibt einen Punkt S in der Aufrissebene x = 0, der von allen drei Punkten A(6/5/2), B(6/6/7) und C(3/–3/7) den gleichen Abstand u hat. Berechnen Sie die Koordinaten von S sowie diesen Abstand u.

d) Welcher Punkt P der Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \\ 9 \\ 6 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt A(6/5/2)?

e) Welche Punkte der obigen Geraden g haben vom Ursprung O(0/0/0) einen Abstand, der grösser als $\sqrt{518}$ ist?

---

4. Anna und Berta spielen verschiedene Spiele. Carlo würfelt für sie mit einem gewöhnlichen Spielwürfel. Nach jedem Wurf wird ein Punkt abgegeben: Anna erhält den Punkt, wenn der Würfel 1 oder 2 Augen zeigt, andernfalls erhält Berta diesen Punkt.

a) In einem ersten Spiel wird genau 3 Mal gewürfelt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna dabei genau einen Punkt erhält?

b) In einem anderen Spiel wird genau 12 Mal gewürfelt. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Anna dabei höchstens 4 Punkte erhält?

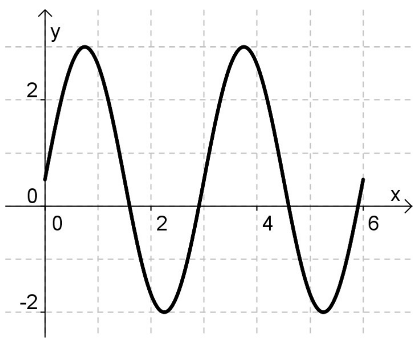
c) In einem dritten Spiel wird so oft gewürfelt, bis eine der beiden Spielerinnen zwei Punkte erhalten hat. Die Spielerin, die dies zuerst erreicht, hat das Spiel gewonnen. Mit welcher Wahrscheinlichkeit gewinnt Anna dieses Spiel?

d) Wie oft muss mindestens gewürfelt werden, damit Anna mit einer Wahrscheinlichkeit von > 99 % mindestens 2 Punkte erhält? Lösen Sie diese Aufgabe mit einer Tabelle.

e) Zum Schluss darf Carlo zwei Mal für sich selber würfeln, und er erhält von Berta als Gewinn 18 Franken, wenn die Summe der beiden Augenzahlen grösser als 8 ist; andernfalls erhält er 9 Franken. Wie gross ist der Erwartungswert für seinen Gewinn?

---

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben:



a) Der Graph der Sinusfunktion y(x) = sin(x) wird zuerst in x–Richtung gestaucht, dann in y–Richtung gestreckt und schliesslich noch in y–Richtung verschoben, wodurch sich die links dargestellte Kurve ergibt. Wie lautet ihre Gleichung?

b) Unter welchem Winkel, auf ganze Grade gerundet, schneiden sich die Graphen der Funktionen f(x) = sin(x) und g(x) = cos(x)?

c) Zeigen und erklären Sie mit Hilfe des Binomischen Lehrsatzes, warum $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n}$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ gleich 2^n ist.

d) Die Punkte A(2/3/3) und B(–3/–2/2) sind gegeben. Finden Sie alle Punkte C auf der z–Achse, die mit A und B zusammen ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit AB als Hypotenuse bilden.

e) Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hôpital den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\cos(x) - 0.5}{e^{3x - \pi} - 1}$.
