Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Winter 2013 Basel / Zürich Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden.

- Hilfsmittel: Formelsammlung (gemäss Vorgaben SBF/SMK); TR: Casio FX-82 Solar oder TI-30 eco RS.
- Resultate sind vereinfacht und falls möglich exakt anzugeben: Lassen Sie also Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen. Falls Sie stattdessen Resultate als Dezimalbrüche angeben, so sind diese sinnvoll zu runden. Lösungen ohne Angabe eines nachvollziehbaren Lösungsweges werden nicht bewertet und ergeben keine Punkte.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für die Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.

---

1. Für jeden Wert des positiven Parameters k ist mit $f_k(x) = k^2 \cdot \sin(k \cdot x)$ eine Funktion f_k mit der Definitionsmenge $\Delta = \mathrm{P}$ definiert.
   a) Bestimmen Sie von dieser Funktion $f_k(x)$ allgemein die kleinste positive Nullstelle x_o sowie die x– und die y–Koordinate des Hochpunktes H mit der kleinsten positiven x–Koordinate.
   b) Geben Sie die Gleichung y(x) = … derjenigen Kurve an, auf der alle diese Hochpunkte H liegen.
   c) Berechnen Sie allgemein $\int_0^{x_o} f_k(x)\,dx$ (x_o ist die kleinste positive Nullstelle von f_k).
   d) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen der Funktion f_3 im Punkt $P\left(\frac{\pi}{9} / \ldots\right)$.
   e) Die Funktion f_k kann umgekehrt werden, wenn ihre Definitionsmenge Δ zuerst sinnvoll auf eine Teilmenge Δ_k* von P eingeschränkt wird. Geben Sie allgemein den grösstmöglichen, von k abhängigen Definitionsbereich Δ_k* sowie die Gleichung dieser Umkehrfunktion $\bar{f}_k$ an.

---

2. Mit $z_1 = 4$, $z_2 = 4q$, $z_3 = 4q^2$, … und der komplexen Zahl $q = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdot \mathrm{cis}(30^\circ)$ ist eine unendliche geometrische Folge komplexer Zahlen definiert (wobei $\mathrm{cis}(\varphi) \equiv \cos(\varphi) + \boldsymbol{i}\sin(\varphi)$ ist).
   a) Zeichnen Sie in einer Gauss'schen Zahlenebene die ersten vier Glieder z_1 bis z_4 dieser Folge ein. Verwenden Sie vier 'Häuschen' für die Einheiten auf den Achsen. Achten Sie speziell auf eine korrekte Beschriftung der Achsen.
   b) Berechnen Sie die Summe $S = \sum_{k=1}^{\infty} z_k$, angenähert in kartesischer Form $a + \boldsymbol{i}\, b$.
   c) Berechnen Sie die Differenz $d_1 = z_2 - z_1$ sowie ihre Norm $|d_1|$, je in exakter kartesischer Form.
   d) Berechnen Sie angenähert die gesamte Länge L des aus unendlich vielen Teilstrecken bestehende Streckenzuges von z_1 nach z_2, von dort nach z_3, von dort nach z_4, und so weiter.
   e) Einer der Winkel des Dreiecks mit dem Ursprung O und den Punkten z_1 und z_2 misst 30°. Berechnen Sie den Winkel δ beim Punkt z_1, auf ganze Grade gerundet.

---

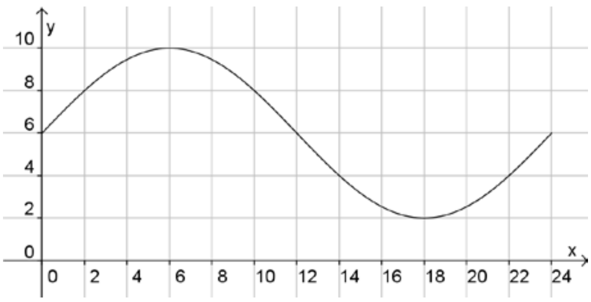
3. Gegeben sind die drei Punkte A(4/1/4), B(0/3/0) und C(0/1/2).
   a) Berechnen Sie den Winkel $\alpha = \sphericalangle CAB$, auf ganze Grade gerundet.
   b) Berechnen Sie eine kartesische Gleichung der Ebene E[A, B, C].
   c) Berechnen Sie den Abstand des Punktes P(2/4/3) von dieser Ebene E.
   d) Berechnen Sie den Abstand des Punktes A von der Geraden (PC).
   e) Für welche Punkte Q(x/y/0) der Grundrissebene hat die Gerade (QC) von A und von B gleiche Abstände? Bestimmen Sie eine Koordinatengleichung für die Kurve, auf der diese Punkte Q liegen.

---

4. Herr Wunderlich behauptet, übersinnliche Fähigkeiten zu besitzen. Um diese Behauptung zu prüfen, wird eine Testreihe durchgeführt. Bei diesem mehrfach durchgeführten Test wählt ein Prüfender jeweils zufällig einen der Buchstaben A, B respektive C aus und fordert die Testperson auf, diesen verdeckt ausgewählten Buchstaben zu nennen.
   a) Der Test werde *n* Mal durchgeführt. Berechnen Sie den Erwartungswert $E(X)$ der Anzahl richtiger Antworten einer Testperson, die ihre Antworten nur durch zufälliges Raten abgibt.
   b) Berechnen Sie die Standardabweichung der Anzahl richtiger Antworten einer nur ratenden Person unter den obigen Voraussetzungen.
   c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine nur ratende Person bei $n = 9$ solcher Tests genau 3 richtige Antworten abgibt?
   d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine nur ratende Person bei $n = 7$ solcher Tests in der Mehrzahl der Versuche die richtige Antwort gibt?
   e) Wie oft müsste der Test mindestens durchgeführt werden, damit die Wahrscheinlichkeit, mit blossem Raten mindestens 2 richtige Antworten zu erzielen, grösser als 99 % wird? Lösen Sie diese Aufgabe mit einer passenden Tabelle.

---

5. Fünf voneinander unabhängige Kurzaufgaben:
   a) Beim exponentiellen Wachstum einer Grösse nimmt diese jedes Jahr immer wieder um *p* % zu. Berechnen Sie, für ein allgemeines *p* exakt, sowie numerisch und sinnvoll gerundet für *p* % = 5 %, den Wert der Verdoppelungszeit T_2, also derjenigen Zeit, die vergehen muss, bis sich der Wert dieser Grösse jeweils wiederum verdoppelt hat.



   b) Links ist der Graph einer zunächst in beiden Achsenrichtungen gestreckten und anschliessend nach oben verschobenen Sinus–Kurve dargestellt; *x* ist im Bogenmass angegeben. Bestimmen Sie die Gleichung dieser Kurve.

   c) Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-(\cos(x))^3}{(\sin(x))^2}$.

   d) Lösen Sie die Gleichung $3 \cdot \log_x(3) + \log_x(3x) = 2$ nach x auf.

   e) Berechnen Sie $\displaystyle\int_0^{\pi/4} x \cdot \cos(2x)\,dx$.

Ende