Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Winter 2014 Zürich Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung (gemäss Vorgaben SBFI/SMK: FoTaBe, Fundamentum); TR: Casio FX-82 Solar oder TI-30 eco RS.
- Resultate sind vereinfacht und falls möglich exakt anzugeben: Lassen Sie also Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen. Falls Sie stattdessen Resultate als Dezimalzahlen angeben, so runden Sie diese auf drei wesentliche Stellen.
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für die Note 6 muss nicht die Maximalpunktzahl erreicht werden.
- Bei jeder Aufgabe soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.

---

1. Für jeden Wert des positiven Parameters k ist mit $f_k(x) = x^3 - 2k \cdot x^2 + k^2 \cdot x$ eine Funktion f_k definiert. Es gelte als bekannt, dass alle diese Funktionen f_k je genau einen Wendepunkt aufweisen.
   a) Bestimmen Sie die Nullstellen dieser Funktionen.
   b) Welche endliche – von k abhängige – Fläche wird vom Graphen der Funktion f_k und der x–Achse eingeschlossen?
   c) Bestimmen Sie die – von k abhängigen – Koordinaten derjenigen Punkte, in denen der Graph von f_k eine horizontale Tangente aufweist.
   d) Geben Sie die Gleichung y(x) = … derjenigen Kurve an, auf der die Wendepunkte all dieser Kurven liegen.
   e) Wie muss k gewählt werden, damit sich der Graph von f_k und die in d) gefundene Kurve senkrecht schneiden?

---

2. Gegeben seien die komplexen Zahlen $z_1 = a + i\,b$ und $z_2 = c + i\,d$ (mit reellen Zahlen a, b, c und d).
   a) Zeigen Sie, dass für beliebige z_1, z_2 die "Parallelogramm–Gleichung" gilt:
   $$|z_1 - z_2|^2 + |z_1 + z_2|^2 = 2\,(|z_1|^2 + |z_2|^2).$$
   b) Bestimmen Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = 6\,i$ in Polarform.
   c) Bestimmen Sie alle Fixpunkte der Funktion $w = f(z) = (3 + 4i) \cdot z + 2 - 6\,i$ in kartesischer Form.
   d) Bestimmen Sie den Real– und den Imaginärteil von e^{3-2i}, je gerundet auf 3 wesentliche Stellen (e = 2.718…).
   e) Sei $p(z)$ ein in z quadratisches Polynom mit reellen Koeffizienten. Zeigen Sie, dass aus $p(z) = 0$ folgt, dass auch $p(\overline{z}) = 0$ ist.

Bitte wenden!

3. Gegeben sind die vier Punkte A(1/5/2), B(3/9/6), C(7/5/8) und D(5/1/4).
   a) Zeigen Sie, dass A, B, C und D die Ecken eines (ebenen!) Quadrates sind.
   b) Bestimmen Sie eine kartesische Gleichung ($a \cdot x + b \cdot y + c \cdot z + d = 0$) der Ebene α, in der dieses Quadrat liegt (mit möglichst einfachen ganzen Zahlen *a, b, c* und *d*).
   c) Wie muss ein Punkt X auf der *x*–Achse gewählt werden, damit der Flächeninhalt **A** des Dreiecks ABX gerade gleich 9 wird?
   d) Geben Sie eine Parametergleichung der Geraden *m* an, die durch den Mittelpunkt M des Quadrates ABCD geht und senkrecht auf der Ebene α steht.
   e) Bestimmen Sie die beiden Punkt S_1 und S_2 auf der in d) gefundenen Geraden *m* so, dass die quadratischen Pyramiden mit der Grundfläche ABCD und der Spitze S_1 resp. S_2 beide je ein Volumen $V = 180$ bekommen.

---

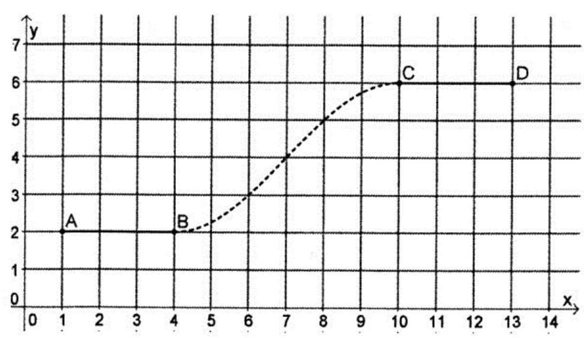
4. Eine Urne enthält 4 rote und 6 schwarze, sonst identische, nicht nummerierte Kugeln. Daraus wird 3 Mal hintereinander zufällig eine Kugel gezogen, ihre Farbe notiert und die Kugel wieder zurückgelegt. Die Reihenfolge spiele keine Rolle.
   a) Sei *X* die Anzahl der gezogenen roten Kugeln. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit $P(X = k)$ für alle möglichen Werte von *k*.
   b) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$ der Zufallsvariablen *X*.
   c) Wie oft muss dieser Versuch im Mittel wiederholt werden, bis zum ersten Mal genau 3 rote Kugeln gezogen werden?
   d) Nach Bezahlen eines Einsatzes dürfen Sie nacheinander und mit Zurücklegen genau 3 Mal eine Kugel ziehen, und Sie erhalten das Quadrat der Anzahl der gezogenen roten Kugeln in Franken ausbezahlt. Was ist der faire Einsatz für dieses Spiel?
   e) Es sollen nun drei Kugeln mit einem Griff aus dieser Urne gezogen werden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, zwei rote und eine schwarze Kugeln zu ziehen?

---

5. Fünf voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

a) Es gibt beliebig viele Vektoren $\vec{c}$, die senkrecht auf dem Vektor $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ stehen und die Länge 15 haben. Geben Sie irgendeinen davon an.

b) Die beiden Strecken AB und CD im nebenstehenden Diagramm sollen von B bis C durch ein Stück einer passend verschobenen und gestreckten Sinuskurve verbunden werden, welches bereits gestrichelt eingezeichnet ist. Finden Sie die Gleichung $y(x) = \ldots$ für dieses Kurvenstück.



c) Berechnen Sie den Mittelwert der Funktion $f(x) = \sqrt{x} \cdot (2 - x)$ im Intervall [0; 2].

d) Was sind die Bedingungen für die Parameter *b, c* und *d*, damit die kubische Funktion $y(x) = x^3 + b\,x^2 + c\,x + d$ ein lokales Minimum und ein lokales Maximum aufweist?

e) Berechnen Sie im Dreieck mit Seiten $a = 8$, $b = 15$ und $c = 13$ den 'mittelgrossen' Winkel.

Ende.