Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Winter 2015 Zürich Name / Vorname ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden.

- Hilfsmittel: Formelsammlung (gemäss Vorgaben SBFI/SMK: FoTaBe, Fundamentum); TR: Casio FX-82 Solar oder TI-30 eco RS.
- Resultate sind vereinfacht und falls möglich exakt anzugeben. Lassen Sie also Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen. Falls Sie stattdessen Resultate als Dezimalzahlen angeben, so runden Sie diese auf mindestens 3 wesentliche Stellen.
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
- In jeder der fünf Aufgaben ergibt jede ihrer fünf Teilaufgaben maximal 2 Punkte. Für die Note 6 werden mindestens 40 Punkte verlangt.
- Bei **jeder der fünf Aufgaben** soll mit einer **neuen Seite** begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.

---

1. Für jeden Wert des reellen Parameters p ist mit $f_p(x) = (p - x) \cdot e^x$ eine Funktion f_p definiert.
   a) Beweisen Sie allgemein, dass der Graph dieser Funktion f_p für jedes p genau einen Hochpunkt aufweist, und geben Sie dessen Koordinaten an.
   b) Beweisen Sie allgemein, dass der Graph dieser Funktion f_p für jedes p genau einen Wendepunkt aufweist, und geben Sie dessen Koordinaten an.
   c) Geben Sie die Gleichung $y(x) = \ldots$ derjenigen Kurve an, auf der die Wendepunkte all dieser Kurven liegen.
   d) Zeichnen Sie für $p = 2$ den Graphen von $f_p(x)$ im Bereich $(-2) \leq x \leq 2$ und $0 \leq y \leq 3$.
   e) Vermuten Sie (ohne Beweis) eine Formel für die k–te Ableitungsfunktion dieser Funktion f_p; beweisen Sie, dass diese Formel für $k = (-1)$ eine Stammfunktion F_p von f_p ergibt.

---

2. Komplexe Zahlen:
   a) Vereinfachen Sie $(2+3i)^2 - \overline{(5-2i)^2}$ so weit wie möglich.
   b) Geben Sie alle komplexen Lösungen der Gleichung $z^3 = (-27)\ i$ in Polarform an.
   c) Bestimmen Sie die Gleichung der Umkehrfunktion $\bar{f}$ der Funktion $w = f(z) = (3 + 4i) \cdot z + 2 - 6i$ in der Form $z = \bar{f}(w) = z_1 \cdot w + z_2$.
   d) Beweisen Sie ohne Verwendung der Polarform, dass die Gleichung $|(a + i\,b)^2| = |a + i\,b|^2$ für beliebige reelle Zahlen a und b immer eine wahre Aussage ergibt.
   e) Gegeben ist die unendliche geometrische Folge komplexer Zahlen $z_0 = 3 + 4i$, $z_1 = (3 + 4i) \cdot (0.15 + 0.2i)$, $z_2 = (3 + 4i) \cdot (0.15 + 0.2i)^2, \ldots$; berechnen Sie die Summe $S = |z_0| + |z_1| + |z_2| + \ldots$ der unendlich vielen Beträge.

---

3. Gegeben ist die Ebene E: $x - 2y - 2z + 2 = 0$ sowie die Kugel K mit dem Mittelpunkt $M(-4/9/8)$ und dem Radius $r = 15$.
   a) In welchen drei Punkten durchstossen die drei Achsen die Ebene E?
   b) Die Kugel K wird vom Punkt $A(6/-19/12)$ aus betrachtet. Unter welchem Sehwinkel φ (in Grad) erscheint sie dem Beobachter?
   c) Welchen Abstand hat der Mittelpunkt M von der Ebene E, und wie gross ist der Radius r^* des Schnittkreises k, in welchem die Ebene E die Kugel K schneidet?
   d) Der Punkt $P(x_0/-2/6)$ liegt auf diesem Schnittkreis k. Bestimmen Sie x_0 und geben Sie eine kartesische Gleichung der Tangentialebene T an die Kugel K im Punkt P an.
   e) Berechnen Sie den Mittelpunkt M^* des Schnittkreises k, und geben Sie eine Parametergleichung der Tangente t an diesen Schnittkreis k in diesem Punkt P an.

---

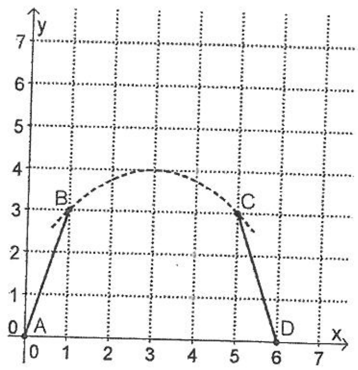
4. Eine Urne enthält 3 weisse und 7 schwarze Kugeln. Es wird 10 Mal eine Kugel mit Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie sinnvoll (auf ≥ 3 signifikante Stellen) gerundet:
   a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in beliebiger Reihenfolge 3 Mal eine weisse und 7 Mal eine schwarze Kugel zu ziehen?
   b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, höchstens 2 Mal eine weisse Kugel zu ziehen?
   c) Wie oft muss aus dieser Urne eine Kugel mit Zurücklegen gezogen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% mindestens 1 Mal eine weisse Kugel gezogen wird?
   d) Bei einem Spiel werden aus dieser Urne zwei Kugeln ohne Zurücklegen gezogen. Wird keine weisse Kugel gezogen, ist der Gewinn Fr. 1.-, bei genau einer weissen Fr. 2.- und bei zwei weissen Fr. 3.-; wie gross ist der zu erwartende Gewinn?
   e) Aus dieser Urne werden nun zum Schluss alle 10 Kugeln einzeln hintereinander ohne Zurücklegen gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sowohl die erste als auch die zuletzt gezogene Kugel schwarze Kugeln sind?

---

5. Fünf voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

a) Berechnen Sie den exakten Flächeninhalt des Dreiecks $A(5/2/1)$ $B(8/6/6)$ $C(9/6/7)$.

b) Die beiden Strecken AB und CD im nebenstehenden Diagramm sollen von B bis C so durch ein Stück einer Parabel verbunden werden, dass sich weder in B noch in C ein "Knick" in der gesamten Kurve ergibt; die gestrichelt eingezeichnete Parabel passt darum nicht! Finden Sie die Gleichung $y(x) = \ldots$ der passenden Parabel.



c) Beweisen Sie: Die Zahl $2^{3n} + 13$ ist für jede natürliche Zahl n durch 7 teilbar.

d) Zeigen Sie, dass $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ein Eigenvektor der Matrix $\mathbb{M} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -6 & 6 \end{pmatrix}$ ist, und finden Sie einen zweiten Eigenvektor $\vec{b}$ von $\mathbb{M}$, der von $\vec{a}$ linear unabhängig ist.

e) Bestimmen Sie a so, dass $\int_0^a x \cdot (a - x)\, dx = 36$ wird.

Ende