Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Winter 2016 Zürich Name / Vorname ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden.

- Hilfsmittel: Formelsammlung (gemäss Vorgaben SBFI / SMK: FoTaBe, Fundamentum); erlaubte Taschenrechner: Casio FX-82 Solar oder TI-30 eco RS.
- Resultate sind vereinfacht und falls möglich exakt anzugeben. Lassen Sie also Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen. Falls Sie stattdessen Resultate als Dezimalzahlen angeben, so runden Sie diese auf mindestens 3 wesentliche Stellen.
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe ist die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
- In jeder der 5 Aufgaben ergibt jede ihrer 5 Teilaufgaben maximal 2 Punkte. Für die Note 6 werden mindestens 40 Punkte verlangt.
- Bei **jeder der 5 Aufgaben** soll mit einer **neuen Seite** begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.

---

1. Für jeden Wert des reellen Parameters p ist mit $f_p(x) = x^3 + p\cdot(x^2 + x) + 2$ eine Funktion f_p definiert.
   a) Für einen speziellen Wert x_1 ist der Funktionswert $f_p(x_1)$ nicht von p abhängig. Das ist ebenfalls so für einen weiteren Wert x_2. Bestimmen Sie x_1 und x_2.
   b) Für welche Werte des Parameters p hat die Funktion f_p keine lokalen Extrema?
   c) Beweisen Sie, dass jede dieser Funktionen f_p genau einen Wendepunkt hat, und bestimmen Sie dessen (von p abhängige) x - Koordinate.
   d) Zeichnen Sie den Graphen von f_3 im Bereich $(-2) \le x \le 0$ und $0 \le y \le 2$.
   e) Berechnen Sie, wiederum für p = 3, den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das durch die beiden Achsen und den Graphen von f_p begrenzt wird.

---

2. Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $u = 3 + 4i$ und $v = 216\cdot cis(30°)$.
   a) Berechnen Sie u statt in Normal- in Polarform und v statt in Polar- in Normalform.
   b) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = v$ in Polarform an.
   c) Berechnen Sie die unendliche Summe $1 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i\right) + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i\right)^2 + \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{4}i\right)^3 + \ldots$ in Normalform. Tipp: Für $|z| < 1$ gilt: $1 + z + z^2 + z^3 + \ldots = \frac{1}{1-z}$.
   d) Zeichnen Sie in der komplexen Zahlenebene, für $0 \le \varphi \le 2\pi$, den Graphen der vom Polarwinkelwinkel φ abhängigen Funktion $z(\varphi) = 2^{\left(\varphi/2\pi\right)} \cdot cis(\varphi)$.
   e) Binomischer Lehrsatz: Verwenden Sie das Pascal-Dreieck, um die 4. Potenz von $z = \overline{1 + 2i}$ ohne Taschenrechnerhilfe zu berechnen.

Fortsetzung hinten!

3. Die vier Punkte A(12/–8/4), B(12/12/4), C(24/12/20) und D(.../.../...) definieren die quadratische Grundfläche einer geraden Pyramide ABCDS mit der Höhe h = 5.
   a) Berechnen Sie die Koordinaten des Quadratmittelpunktes M und des Punktes D.
   b) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Spitzen S_1 respektive S_2.

   Derjenige der Punkte S_1 resp. S_2, der näher beim Ursprung liegt, ist die Spitze S.
   c) Eine Ebene E parallel zur Ebene des Quadrates ABCD schneidet die Pyramide ABCDS so, dass sich das Volumen der abgetrennten Spitze zum Volumen des übrig bleibenden Stumpfes wie 1 : 7 verhält. Geben Sie ihre kartesische Gleichung an.
   d) Eine Ebene F durch die Spitze S ist parallel zur Seite BC und teilt das Volumen der Pyramide ABCDS im Verhältnis 3 : 2; die Punkte B und C gehören zum kleineren Teilstück. Wie gross ist der Inhalt des Ebenenstücks von F innerhalb der Pyramide?
   e) Berechnen Sie Mittelpunkt M* und Radius r der Umkugel k der Pyramide ABCDS.

---

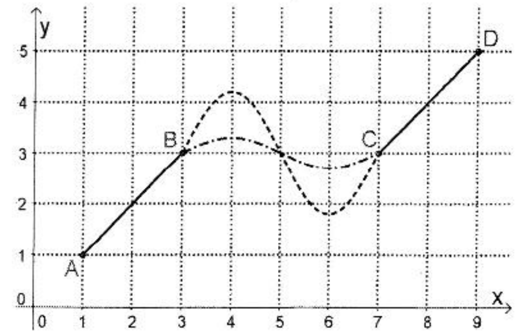
4. In einem Geldbeutel befinden sich 15 Münzen, von denen 5 gezinkt sind.
   a) Es werden drei Münzen ohne Zurücklegen aus dem Geldbeutel genommen. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens eine davon gezinkt ist.
   b) Wie viele Male muss eine Münze zufällig gezogen und sofort wieder zurückgelegt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mindestens 95% mindestens eine gezinkte gezogen wird?
   c) Eine zufällig gezogene Münze aus dem Geldbeutel wird zwei Mal geworfen. Zeigt sie zuerst Kopf und dann Zahl, so gewinnt ein erster Spieler. Bei der umgekehrten Reihenfolge gewinnt ein zweiter Spieler. In den anderen Fällen wird das Spiel wiederholt. Begründen Sie, warum dadurch tatsächlich ein faires Spiel garantiert wird.
   d) Ein Casino bietet das folgende Spiel an: Ein Spieler bezahlt einen Einsatz von 18 CHF. Dafür wird eine gezinkte Münze, die mit einer Wahrscheinlichkeit von 60% Kopf zeigt, zweimal geworfen. Zeigt die Münze zweimal Zahl, erhält der Spieler 30 CHF, zeigt sie zwei Mal Kopf, erhält er 10 CHF; in allen anderen Fällen erhält er x CHF. Wie gross muss x sein, damit dieses Spiel fair ist?
   e) Eine erste Münze zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 70% Kopf, eine zweite zeigt mit einer Wahrscheinlichkeit von 40% Kopf. Die beiden Münzen werden miteinander geworfen: Eine der beiden Münzen zeigt nun Kopf, die andere Zahl. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es die erste Münze ist, die Kopf zeigt?

---

5. Fünf voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

a) Für jede Zahl $n \in \mathbb{N}$ ist $3^n - 3$ durch 6 teilbar. Zeigen Sie dies.

b) Die Strecken AB und CD in der Zeichnung rechts sollen zwischen B und C mit einer verschobenen und gestreckten Sinuskurve so verbunden werden, dass in diesen beiden Punkten kein "Knick" entsteht. Die gestrichelt eingezeichnete Kurve ist darum zu gross, die strichpunktiert eingezeichnete zu klein. Geben Sie die Funktionsgleichung *y(x)* = ... der passenden Kurve an.



c) Beweisen Sie, dass die vier Punkte A(1/2/3), B(6/5/5), C(8/8/10) und D(3/5/8) die Ecken eines Parallelogramms sind.

d) Wie viele Ziffern hat die Zahl 2016^{2016}? Bestimmen Sie auch ihre ersten 3 Ziffern.

e) Die Matrix $A = \begin{pmatrix} a & -a \\ -a & a \end{pmatrix}$ ist für gewisse a gleich ihrer eigenen dritten Potenz, also A^3.

Dies ist z. B. möglich für a = 0. Finden Sie alle anderen Lösungen für a.

Ende.