Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Bülach und Zürich, Winter 2019

M A T H E M A T I K   E r w e i t e r t e s   N i v e a u

Kand.-Nr.:

....

Name, Vorname:

....

Erreichte Punktzahl:

....

Note:

....

Visum Korrigierende(r):

....

Fach:	**Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**75 Punkte**
Autoren:	H.U. Keller / J. Zinn
Fachspezifische Anweisungen:	**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Bitte leer lassen:

1					2					3					4					5					
a	b	c	d	e	a1	a2	b1	b2	b3	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	Σ
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	75

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar.

---

1 Analysis

Gegeben ist die von einem positiven Parameter *k* abhängige Funktion $f_k(x) = \frac{12\,x}{k^2} \cdot e^{-\frac{x}{k}}$.

a) Sie dürfen davon ausgehen, dass der Graph dieser Funktion $f_k(x)$ für jedes *k* jeweils genau einen Hochpunkt H aufweist. Bestimmen Sie allgemein – unter Benützung dieser Tatsache – die (von *k* abhängigen) *x*– und *y*–Koordinaten dieses Hochpunktes.

b) Sie dürfen weiter davon ausgehen, dass der Graph dieser Funktion $f_k(x)$ für jedes *k* jeweils genau einen Wendepunkt W aufweist. Bestimmen Sie allgemein – unter Benützung dieser Tatsache – die (von *k* abhängigen) *x*– und *y*–Koordinaten dieses Wendepunktes.

c) Zeichnen Sie die Graphen von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ für $0 \le x \le 5$ und $0 \le y \le 5$, beide in einem einzigen Diagramm.

d) Alle die in 1. b) oben berechneten Wendepunkte liegen auf einer bestimmten Kurve. Bestimmen Sie die Funktionsgleichung $y(x) = ...$ dieser Kurve.

e) Die Funktion $F_k(x) = \frac{(-12)}{k} \cdot (x+k) \cdot e^{-\frac{x}{k}}$ ist eine Stammfunktion von $f_k(x)$; berechnen Sie damit den exakten Wert von $\int_0^1 f_1(x)\,dx$.

---

2 Komplexe Zahlen

a_1) Zeichnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^4 = 16\,\boldsymbol{i}$ in einer Gaussschen Zahlenebene ein.

a_2) Durch vier weitere Zahlen lassen sich die gefundenen Lösungen zu einem regelmässigen Achteck ergänzen. Gesucht ist eine möglichst einfache Gleichung mit genau diesen acht Lösungen.

Seien nun $a = 4 + \boldsymbol{i}$, $b = 1 + 4\,\boldsymbol{i}$, $c = \dfrac{a+b}{2}$, $d = 5$ und $e = 5\,\boldsymbol{i}$.

b$_1$) Zeichnen Sie die Zahlen a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 in einer (neuen) Gaussschen Zahlenebene ein.

b$_2$) Fassen Sie diese fünf Zahlen a^2, b^2, c^2, d^2, e^2 als Punkte in einem Kartesischen Koordinatensystem auf. Diese fünf Punkte liegen auf einer Parabel p. Gesucht ist die Gleichung $y(x) = \ldots$ dieser Parabel p.

b$_3$) Betrachten Sie die Zahl $f = x + (-x + 5)\,\boldsymbol{i}$, mit $x \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass der Punkt, der zur Zahl f^2 gehört, für jedes reelle x auf dieser Parabel p liegt.

---

3 Vektorgeometrie

Gegeben ist eine Kugel K mit Radius $R = 26$ und dem Ursprung als Mittelpunkt, sowie die Ebene E: $3x + 4y + 12z = 0$.

a) Geben Sie die Gleichungen der beiden Tangentialebenen T_1 und T_2, die parallel zur Ebene E stehen, in Koordinatenform an.

b) Unter welchem Winkel (auf ganze Grade gerundet) schneidet sich diese Ebene E mit der Grundrissebene $z = 0$?

c) Eine zu E parallele Schnittebene S schneidet die Kugel K. Ihr Schnittkreis definiert zusammen mit dem Ursprung einen geraden Kreiskegel C mit der Höhe h und dem Grundkreisradius r. Geben Sie das Volumen $V = V(r)$ dieses Kegels C als Funktion der einzigen Variablen r an.

d) Das Volumen V des Kegels C kann aber auch als Funktion der einzigen Variablen h angegeben werden. Geben Sie diese Funktionsgleichung $V = V(h) = \ldots$ an. Wie muss h gewählt werden, damit das Volumen V des Kegels C maximal wird? Ein Beweis wird nicht verlangt.

e) Die Kugel K wird von einem Punkt P auf der Geraden $\vec{r} = t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 12 \end{pmatrix}$ aus betrachtet. Wie muss P gewählt werden, damit die gesamte Kugel unter einem Winkel von $2 \cdot 30° = 60°$ erscheint? Geben Sie die Koordinaten dieses Punktes P an.

---

4 Stochastik

Eine Gruppe von insgesamt 201 Personen wird mit einem noch nicht erprobten Test auf eine Erbkrankheit getestet. Bei 125 Personen fällt dieser Test negativ aus; 47 Personen haben diese Krankheit, obwohl der Test negativ ausgefallen ist, und 21 Personen haben diese Krankheit nicht, obwohl der Test positiv ausgefallen ist.

a) Erstellen Sie ein Baumdiagramm, das für diese Gruppe die absoluten Häufigkeiten sowie die jeweiligen Wahrscheinlichkeiten jedes Teilpfades enthält.

b) Eine Person wird nun zufällig herausgegriffen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person diese Krankheit aufweist?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit negativem Testergebnis diese Krankheit aufweist?

d) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine Person mit dieser Krankheit ein negatives Testresultat erhält?

e) Eine Person wird zufällig herausgegriffen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass diese Person ein negatives Testresultat erhalten hat und diese Krankheit nicht aufweist, oder dass sie diese Krankheit aufweist und ein positives Testresultat erhalten hat?

---

5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

a) Lösen Sie in $\mathbb{N}$: $\dfrac{\binom{n}{4}-\binom{n}{3}}{\binom{n}{2}} = 77$.

b) Bestimmen Sie die Anzahl Stellen sowie die ersten beiden und die letzte Ziffer der natürlichen Zahl 2019^{2019} .

c) Im Land A ist der CO_2 – Ausstoss 250 mal so gross wie im Land B. Dem Land A gelingt es, durch gezielte Massnahmen den CO_2 – Ausstoss jährlich um 18 % zu verringern, während im Land B der CO_2 – Ausstoss jährlich um 16 % ansteigt. Wie viele Jahre dauert es, bis im Land A der CO_2 – Ausstoss erstmals kleiner ist als im Land B?

d) Skizzieren Sie die Graphen von *f:* $y = 3$ und *g:* $y = 3\cos(2x)$ im Bereich $0 \le x \le \pi$. Diese Graphen begrenzen ein endliches Gebiet, dessen Flächeninhalt gesucht ist.

e) Bestimmen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren der Matrix $M = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 6 & 1 \end{pmatrix}$.

– Ende –