Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Zürich und Basel, Winter 2020

MATHEMATIK Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

Name, Vorname:

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Visum Korrigierende(r): ....

Fach:	**Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**75 Punkte**
Autoren:	H.U. Keller / J. Zinn
Fachspezifische Anweisungen:	**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Bitte leer lassen:

1					2					3					4					5					
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	Σ
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	75

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar.

---

1 Analysis

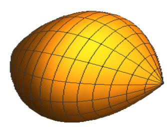
Gegeben ist die Funktion $f_a(x) = a - x^2$, mit $a > 0$.

a) Wie kann a gewählt werden, wenn alle Nullstellen dieser Funktion ganzzahlig sein sollen?

b) Für $a = 27$ bestimmen der Graph dieser Funktion und die x–Achse ein endliches Gebiet *G*. Schreiben Sie diesem Gebiet *G* ein Rechteck mit maximalem Flächeninhalt A_{max} ein. Gesucht ist dieser Flächeninhalt A_{max}.

c) Wie muss a gewählt werden, damit der Graph von $f_a(x)$ die *x*–Achse unter einem Winkel von 60° schneidet?

d) Wählen Sie nun $a = 1$. Die Funktion $f_1(x)$ und die Funktion $y(x) = \cos(b \cdot x)$ mit positivem b haben die gleiche erste positive Nullstelle. Berechnen Sie b und den Flächeninhalt A des von diesen beiden Kurven im ersten Quadranten, im Intervall $x \in [0, 1]$, eingeschlossenen sichelförmigen Flächenstücks.



e) Der Graph der Funktion $f_4(x)$ zwischen den beiden Nullstellen wird um die *x*–Achse rotiert. Wie gross ist das Volumen *V* des dadurch entstehenden Rotationskörpers?

---

2 Komplexe Zahlen

Betrachten Sie die Folge $\{z_n\}$ mit $z_0 = 1$ und $z_k = z_{k-1} \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$ für $k \in \mathbb{N}$.

a) Geben Sie die Zahl $\left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \cdot \frac{1}{2}\right)$ in Polarform an; verwenden Sie diese Polarform–Darstellung für eine explizite Definition $z_k = \dots$ dieser Folge $\{z_n\}$.

b) Zeichnen Sie alle Zahlen $z_0, z_1, \ldots, z_{12}$ in einer Gauss'schen Zahlenebene (mit Einheiten von je 10 Häuschen!) ein und verbinden Sie jeweils aufeinander folgende Punkte. Auf eine korrekte Beschriftung der Achsen wird Wert gelegt.

c) Betrachten Sie nun diese Gauss'sche Zahlenebene als gewöhnliche *x*–*y*–Ebene. Berechnen Sie den Umfang und den Flächeninhalt der in b) gezeichneten Figur, beides je auf sechs Stellen nach dem Dezimalpunkt gerundet.

Seien nun $u = a + i \cdot b$ und $v = c + i \cdot d$ (mit $a, b, c, d \in \mathbb{R}$):

d) Beweisen Sie ohne Verwendung der Polarform, dass immer gilt: $\overline{u} \cdot \overline{v} = \overline{u \cdot v}$.

e) Beweisen Sie ohne Verwendung der Polarform, dass immer gilt: $\left|\frac{u}{v}\right| = \frac{|u|}{|v|}$.

---

3 Vektorgeometrie

Die Gerade $g:\ \vec{r} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 13 \end{pmatrix}$ durchstösst die Ebene $E:\ 2x + 5y + 14z = 450$ in einem Punkt *D*.

a) Berechnen Sie die Koordinaten von *D*.

b) Welchen Winkel (auf Zehntel Grade gerundet) schliesst die Gerade g mit dem Normalenvektor $\vec{n}$ der Ebene E ein?

c) Wie gross ist der Abstand des Ursprungs *O* (0/0/0) von der Ebene E?

d) Eine Kugel mit dem Mittelpunkt *M* (2/5/14) und dem Radius *a* = 39 schneidet die Ebene E in einem Kreis *k*. Wie gross ist dessen Radius *b*?

e) Eine zur *z*–Achse parallele Ebene V durch die Gerade g schneidet die *x*–*y*–Ebene in einer Geraden $h:\ y(x) = m \cdot x + q$. Berechnen Sie m und q .

---

4 Stochastik

Ein gewöhnlicher Spielwürfel wird sechs Mal hintereinander geworfen.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei genau drei Mal eine '5' gewürfelt wird?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei jede der sechs Augenzahlen genau einmal vorkommt?

c) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei alle Augenzahlen genau in der Reihenfolge '1', '2', '3', '4', '5', '6' nacheinander auftreten?

d) Ein anderer, gefälschter Würfel hat eine veränderte Wahrscheinlichkeit $p \neq \frac{1}{6}$ für die Augenzahl '6'. Die Wahrscheinlichkeit, in zwei Würfen mit diesem Würfel genau einmal eine '6' zu würfeln, ist $\frac{3}{8}$. Wie gross ist diese Wahrscheinlichkeit p ?

e) Zwei gewöhnliche Würfel sollen 180 Mal gleichzeitig miteinander geworfen werden. Wie oft kann dabei eine Augensumme beider Würfel von 7 erwartet werden? Wie gross ist die zu erwartende Standardabweichung von diesem Mittelwert?

---

5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

a) Beweisen Sie mit Hilfe des Kosinus–Satzes, dass es kein Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen geben kann, das irgendwo einen exakten 30° – Winkel aufweist.

b) Das Bruttosozialprodukt in einem Land A ist zurzeit zwölf Mal so gross wie in einem Land B. Es nimmt jährlich um 8 % ab, während das Bruttosozialprodukt im Land B jährlich um 5 % zunimmt. Nach wie vielen ganzen Jahren ist das Bruttosozialprodukt im Land B zum ersten Mal grösser als im Land A?

c) Eine der drei reellen Lösungen der kubischen Gleichung $x^3 + 3x^2 - 234x + 648 = 0$ ist $x_1 = 3$. Bestimmen Sie die anderen beiden Lösungen x_2 und x_3.

d) Bestimmen Sie die Anzahl der Ziffern der natürlichen Zahl $n = 4^{(5^6)}$ sowie ihre ersten drei Ziffern. Tipp: Berechnen Sie dazu zuerst den Zehnerlogarithmus von n auf TR–Genauigkeit.

e) Von welchen Punkten der *z*–Achse aus gesehen erscheinen die Punkte A (16/6/10) und B (–8/0/2) unter einem rechten Winkel?

– Ende –