Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Zürich und Pfäffikon SZ, Winter 2022

MATHEMATIK Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

....

Name, Vorname:

....

Erreichte Punktzahl: ....
Note: ....
Visum Korrigierende(r): ....

Fach:	**Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Vorgaben der Schweizerischen Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**84 Punkte**
Autoren:	A. Nüesch / Dr. D. Wirz
Fachspezifische Anweisungen:	**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Die Maximalpunktzahlen der einzelnen Aufgaben sind bei den Aufgaben angeschrieben. Die Maximalpunktzahl ist 84. Für 71.5 Punkte wird die Note 6 gegeben.

---

1 Analysis 18P = 5P + 3P + 3P + 4P + 3P

Gegeben ist die Funktion $f(x) = \frac{x^3-a}{2x^2}$ mit dem Parameter a, $a > 0$.

a) Bestimmen Sie die Nullstelle und das lokale Extremum der Funktion f in Abhängigkeit von *a*. Klären Sie dabei ab, um welche Art Extremum es sich handelt. Begründen Sie, weshalb f keine Wendestellen besitzt.

b) Geben Sie Definitions- und Wertemenge der Funktion f an und bestimmen Sie die Gleichung der (schiefen) Asymptote des Graphen von f.
Zeichnen Sie den Graphen von f für den Parameterwert $a = 4$ in ein Koordinatensystem ($1\ LE\ \triangleq 2\ Häuschen$).

c) Die schiefe Asymptote des Graphen von f, die x-Achse und der Graph von f begrenzen im 1. Quadranten eine Fläche, welche sich nach rechts ins Unendliche erstreckt. Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche in Abhängigkeit von a.

Für die folgenden beiden Teilaufgaben ist $a = 4$.

d) Vom Punkt *P(0, -1.5)* aus können zwei Tangenten an den Graphen von f gelegt werden. Bestimmen Sie ihre Gleichungen.

e) Verschieben Sie den Graphen von f so, dass das lokale Extremum in den Nullpunkt zu liegen kommt.
Wie lautet die Gleichung dieser verschobenen Kurve, wie die Gleichung ihrer schiefen Asymptote?

2 Vektorgeometrie 15P = 4P + 3P +3P + 3P + 2P

Wir betrachten die 4 Punkte $A(4,0,2), B(10,12,2), C(2,16,12)$ und $D(-4,4,12)$.

a) Zeigen Sie, dass die 4 Punkte in einer Ebene liegen und ein Quadrat bilden. Bestimmen Sie seine Fläche.

b) Berechnen Sie die Koordinaten der Spitzen S der beiden geraden Pyramiden mit der quadratischen Grundfläche $ABCD$ und dem Volumen 360.

c) Welche Oberfläche besitzt jeweils eine der Pyramiden?

d) Geben Sie eine Koordinatenform der Seitenfläche ABS der Pyramide an, und bestimmen ihren Neigungswinkel gegenüber der Grundfläche. Wählen Sie dazu diejenige Spitze S mit positiver x-Koordinate.

e) Der Mittelpunkt des Quadrats $ABCD$ ist Mittelpunkt einer Kugel, welche alle Seitenflächen der beiden Pyramiden berührt. Berechnen Sie den Radius dieser Kugel.

3 Stochastik 15P = 4P + 1P + 2P + 3P + 2P + 3P

Wir benützen einen normalen Würfel (Laplace-Würfel), dessen Seitenflächen mit den Ziffern 1, 1, 2, 2, 2, 4 beschriftet sind. Daneben liegt ein gut durchmischter Stapel von 13 Spielkarten mit den Werten As, K, D, B, 10, 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2.
Das As ist 11 Punkte wert, König K, Dame D, Bube B und die 10 jeweils 10 Punkte, der Wert der andern Karten ist ihre Punktzahl.

Wir beschäftigen uns zunächst nur mit den Spielkarten.

a) Es werden alle Karten nebeneinander in einer Reihe ausgelegt.
   a_1) Wie viele solche Anordnungen gibt es?
   a_2) Wie viele solche Anordnungen gibt es, bei denen die Karten mit Bildern (As,K,D,B) links und die Karten mit Zahlenwerten rechts nebeneinander liegen?
   a_3) Wie viele Anordnungen gibt es, bei denen die Karten mit Zahlenwerten nebeneinander liegen?

b) Wir ziehen eine Karte aus dem Stapel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für 10 Punkte?

c) Wir ziehen zwei Karten ohne Zurücklegen aus dem Stapel. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für 16 Punkte?

d) Wir ziehen nun Karten mit Zurücklegen aus dem Stapel. Wie oft muss man ziehen, damit wir mit einer Wahrscheinlichkeit von 95% mindestens einmal höchstens 5 Punkte ziehen?

Nun kommt der Würfel ins Spiel.
Die gewürfelte Zahl ist der Faktor, mit dem die gezogene Punktzahl der Karte multipliziert werden muss. Wir betrachten das Ereignis *1 mal würfeln und ziehen einer Spielkarte*.

e) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit für 12 Punkte?

f) Wie viele Punkte erzielt man im Mittel pro Ereignis?

4 Komplexe Zahlen, Lineare Abbildungen
19P = 10P (2+4+4) + 9P (3+3+1+2)

Die beiden Teilaufgaben 4.1 und 4.2 sind unabhängig voneinander lösbar.

4.1 a) Markieren Sie das Gebiet in der komplexen Zahlenebene in dem alle Punkte z liegen, für die folgende Bedingungen gelten:
$|z| \leq 4, \quad 45° \leq \arg(z) \leq 135°, \quad Im(z) > 1, \quad Re(z) > -2$.

b) Lösen Sie die Gleichung $(z^2 - i)(z^3 + 8) = 0$ für alle komplexen Zahlen z.
(Exakte Resultate in Normalform)

c) Gegeben ist die komplexe Zahl $z = 1 - i$.
Für welche natürlichen Zahlen n gilt: $z^n = (\overline{z})^n$

4.2 Uns interessiert die Abbildung A, welche durch die Matrix $A = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ definiert wird.

a) Bestimmen Sie Ihre Eigenwerte und die dazu gehörenden Eigenvektoren von A.

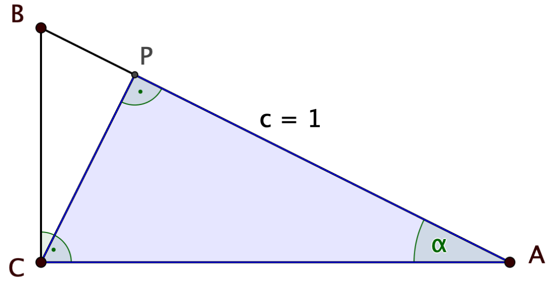
b) Berechnen Sie die Bildpunkte Q_1, Q_2, Q_3 und Q_4 der durch A abgebildeten Punkte $P_1(0, 0), P_2(-1, 1), P_3(-2.5, 0.5)$ und $P_4(-1.5, -0.5)$. Zeichnen Sie Bilder und Urbilder in einem passenden Koordinatensystem ein.

c) Begründen Sie, weshalb das Viereck $Q_1Q_2Q_3Q_4$ die fünffache Fläche des Vierecks $P_1P_2P_3P_4$ besitzt.

d) Durch die Eigenvektoren werden zwei Geraden definiert, welche durch den Ursprung gehen. Geben Sie deren Gleichungen an und erklären Sie den Unterschied beim Abbilden von Punkten dieser beiden Geraden.

5 Extremwertaufgabe, Kegelschnitt, Gleichungen
17P = 7P (3+4) + 6P (4+2) + 4P (1.5+2.5)

Die drei Teilaufgaben 5.1, 5.2 und 5.3 sind unabhängig voneinander lösbar.



5.1 Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke mit Hypotenuse $c = 1$ und Winkel α (Skizze). Der Fusspunkt der Höhe h_c ist der Punkt P.

a) Zeigen Sie, dass der Flächeninhalt F des Dreiecks APC durch die Formel $F = \frac{1}{2} sin(\alpha) cos^3(\alpha)$ berechnet werden kann.

b) Bestimmen Sie den Winkel α so, dass der Flächeninhalt maximal wird. Berechnen Sie diese maximale Fläche und zeigen Sie, dass es sich tatsächlich um ein Maximum handelt.

5.2 Von einer Hyperbel sind die Brennpunkte $F_1(4, 3)$ und $F_2(4, -7)$ und eine der Asymptoten $y = \frac{3}{4}x - 5$ gegeben.

a) Bestimmen Sie den Mittelpunkt und die Scheitelpunkte der Hyperbel. Geben Sie eine Gleichung dieser Hyperbel an und zeichnen Sie den Graphen in einem Koordinatensystem.

b) Wie lauten die Gleichungen der Asymptoten, wenn man die Hyperbel um 90^0 um ihren Mittelpunkt dreht?

5.3 Lösen Sie die folgenden beiden Gleichungen im Bereich der reellen Zahlen:

a) $2e^{2x} - e^{3-x} = 0$ b) $2\, ln(x + 1) = ln(2x + 6) - ln(2)$