



**Schweizerische Maturitätsprüfung**

Zürich und Pfäffikon SZ, Winter 2023

# M A T H E M A T I K

# Erweitertes Niveau

**Kand.-Nr.:**

.....

**Name, Vorname:**

.....

Erreichte Punktzahl:

.....

Note:

.....

Visum Korrigierende(r):

.....

Fach:

**Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**

Dauer:

**4 Stunden**

Zugelassene Hilfsmittel:

Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Vorgaben  
der Schweizerischen Maturitätskommission SMK

Maximale Punktzahl:

**70 Punkte**

Autoren:

A. Nüesch / Dr. D. Wirz

Fachspezifische Anweisungen:

**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**



# Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
  - Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
  - Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
  - Für die volle Punktzahl einer Aufgabe ist die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.
  - Die Maximalpunktzahlen der einzelnen Aufgaben und Teilaufgaben sind bei den Aufgaben angeschrieben.  
Die Maximalpunktzahl ist 70. Für 60 Punkte wird die Note 6 gegeben.
- 

## 1 Vektorgeometrie **14P = 4P+ 2P +2P + 2P + 2P + 2P**

Wir betrachten die 3 Punkte  $A(6,0,0)$ ,  $B(0,10,0)$ ,  $C(0,0,4)$  und die Kugel  $K_1: x^2 + y^2 + z^2 - 20x - 12y - 38z + 272 = 0$ .

- Bestimmen Sie den Winkel  $\beta$  und den Flächeninhalt des Dreiecks  $ABC$ .
- Die Punkte  $A, B$  und  $C$  bestimmen die Ebene  $E$ .  
Geben Sie die Koordinatengleichung dieser Ebene an und skizzieren Sie die Ebene in einem Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden  $g$ , welche in der Ebene  $E$  liegt und von der  $xy$ -Ebene den Abstand 2 besitzt.
- Bestimmen Sie Mittelpunkt  $M$  und Radius  $R$  der Kugel  $K_1$ .
- Geben Sie die Gleichung derjenigen Kugel  $K_2$  an, welche den gleichen Mittelpunkt besitzt wie  $K_1$  und die Ebene  $E$  berührt.  
Bestimmen Sie auch den Berührungspunkt.
- Die  $xy$ -Ebene sei die Grundebene, die Gravitationsrichtung in Richtung der negativen  $z$ -Achse.  
In welche Richtung rollt die Kugel  $K_2$ , wenn Sie vom Berührungspunkt aus auf der Ebene  $E$  gegen die  $xy$ -Ebene rollt?

## 2 Analysis

14P = 7P + 1P + 1P + 3P + 2P

Wir betrachten die Funktion  $f(x) = 5a^2x^2e^{-ax}$  mit  $a > 0$ .

- Bestimmen Sie in Abhängigkeit von  $a$  die Nullstelle, die lokalen Extremalstellen (inkl. Art), die Wendestellen und die Gleichung der Asymptote. Skizzieren Sie für  $a = 1$  den Graphen der Funktion  $f$  in einem passend angeschriebenen  $xy$ -Koordinatensystem.
- Bestimmen Sie den horizontalen Abstand der beiden Wendepunkte.
- Zeigen Sie, dass die  $y$ -Koordinate des lokalen Maximums nicht von  $a$  abhängt.
- Zeigen Sie mithilfe der *partiellen Integration*, dass  $F(x) = -\frac{5}{a}e^{-ax}(a^2x^2 + 2ax + 2) + C$  Stammfunktionen von  $f(x)$  sind.
- Die zur  $y$ -Achse parallele Gerade durch das lokale Maximum, der Graph von  $f$  und die  $x$ -Achse begrenzen ein nach rechts unbegrenztes Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

## 3 Stochastik

14P = 2P + 2P + 2P + 2P + 2P + 2P + 2P



Analog zum Würfel werden alle platonischen Körper mit den Ziffern 1 bis 4 (Tetraeder), 1 bis 8 (Oktaeder), 1 bis 20 (Ikosaeder) und 1 bis 12 (Dodekaeder) beschriftet.

- Sie werfen alle 5 Körper miteinander.
  - Wie viele Wurfbilder sind denkbar?
  - Wie viele mögliche Augensummen gibt es?
- Sie werfen 12 ununterscheidbare Tetraeder miteinander und zählen, wie oft jede der Augenzahlen vorkommt.  
(Eine Möglichkeit wäre: *Es erscheint 3 mal die Augenzahl 1, 6 mal die Augenzahl 2, 2 mal die Augenzahl 3 und 1 mal die Augenzahl 4.*)  
Wie viele Ergebnisse sind denkbar?
- Sie wählen einen der fünf platonischen Körper zufällig aus und werfen ihn 2 Mal.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme 4?
- Sie wählen zwei der platonischen Körper aus und werfen jeden genau 1 Mal.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist die Augensumme 29?
- Sie werfen alle fünf Körper miteinander.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Augenzahlen gleich?
- Sie werfen alle fünf Körper miteinander.  
Wie oft müssen Sie diesen Versuch durchführen, damit Sie mit 90% Wahrscheinlichkeit mindestens 1 Mal die maximale Augensumme werfen.
- Sie wählen einen der Körper zufällig aus und werfen ihn. Die Augenzahl ist 3.  
Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie das Oktaeder geworfen?

#### 4 Komplexe Zahlen, Kegelschnitt 14P = 8P (2+1+1+2+2) + 6P (2+2+2)

Die beiden Teilaufgaben 4.1 und 4.2 sind unabhängig voneinander lösbar.

4.1 Wir untersuchen eine Folge komplexer Zahlen, die durch die rekursive Definition  $z_{n+1} = z_n \cdot q$  mit  $z_0 = 8 + 2i$ ,  $z_1 = 3 + 5i$  und  $z_4 = -2 - \frac{1}{2}i$  gegeben ist.

- Berechnen Sie  $z_2$  und  $z_3$ .
- Zeichnen Sie  $z_0, \dots, z_4$  in der komplexen Zahlenebene.
- Zeigen Sie, dass  $z_0$  und  $z_4$  auf einer Geraden liegen.
- Bestimmen Sie die explizite Gleichung dieser komplexen Folge. Beweisen Sie, dass gilt:  $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = 0$
- Wie lang ist die Strecke  $\overline{z_0 z_1} + \overline{z_1 z_2} + \overline{z_2 z_3} + \dots$ ?

#### 4.2

- Bestimmen Sie die Gleichung der Parabel, welche den Brennpunkt  $F(4, 3)$  und die Leitlinie  $y = -3$  besitzt.

*Variante:* Falls Sie die Teilaufgabe a) nicht lösen können, verwenden Sie für die folgenden Teilaufgaben die Parabelgleichung  $(x + 8)^2 = -12(y - 6)$ .

- Zeigen Sie, dass  $y = 1 - x$  die Gleichung der Tangente im Punkt  $P(-2, 3)$  ist.
- Bestimmen Sie den zu  $P$  symmetrisch zur Parabelachse liegenden Punkt  $Q$  auf der Parabel und geben Sie die Gleichung der Tangente im Punkt  $Q$  an.

## 5 Lineare Abbildung, Extremwertaufgabe

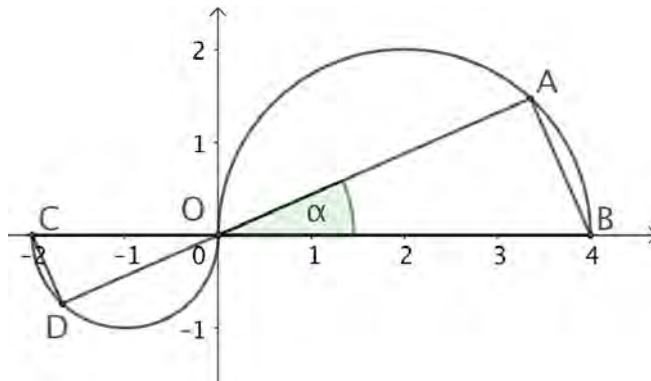
14P = 8P (2+3+1.5+1.5) + 6P (2+1+3)

Die beiden Teilaufgaben 5.1 und 5.2 sind unabhängig voneinander lösbar.

5.1 Wir untersuchen die Matrix  $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ .

- Weshalb besitzt diese Matrix keine Inverse?  
Welche Bedeutung hat dies für die Lösung der Aufgabe *Finde das Urbild des Punktes (2, 3)* (Diese Aufgabe muss nicht gelöst werden!)?
- Bestimmen Sie die Eigenwerte von  $A$  und die dazugehörigen Eigenvektoren der Länge  $\sqrt{2}$  und positiven  $x$ -Komponenten.
- Wie werden Punkte, die auf der Geraden  $y = x$  liegen, durch die Matrix  $A$  abgebildet? Begründen Sie Ihre Antwort geometrisch oder durch Rechnung.
- Wie werden Punkte, die auf der Geraden  $y = -x$  liegen, durch die Matrix  $A$  abgebildet? Begründen Sie Ihre Antwort geometrisch oder durch Rechnung.

5.2 Eine Gerade durch den Nullpunkt ist gegenüber der  $x$ -Achse um den Winkel  $\alpha$  geneigt. Sie schneidet die beiden Halbkreise in den Punkten  $A$  und  $D$ .



- Bestimmen Sie die Summe der Flächeninhalte der beiden Dreiecke  $OAB$  und  $OCD$  in Abhängigkeit von  $\alpha$ .
- Wie gross ist diese Flächensumme für  $\alpha = 60^\circ$ ?
- Für welchen Winkel  $\alpha$  wird die Flächensumme maximal?



