ERWEITERTES NIVEAU

F 23

1) a) $A = (6,0,0)$
$B = (0,10,0) \rightarrow \quad \overrightarrow{BA} = \begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 4 \end{pmatrix}$
$C = (0,0,4)$

$|\overrightarrow{BA}| = \sqrt{6^2+(-10)^2+0^2} = \sqrt{136} \quad |\overrightarrow{BC}| = \sqrt{116}$

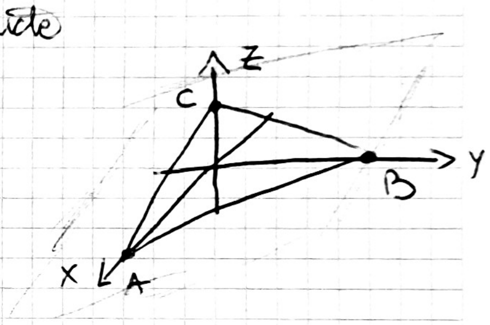
$$\cos(\beta) = \frac{\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}||\overrightarrow{BC}|} = \frac{0+100+0}{\sqrt{136} \cdot \sqrt{116}} \approx 0{,}796 \rightarrow \beta = \cos^{-1}(0{,}796)$$

$$\beta \simeq \underline{37{,}23^\circ}$$

$$A = \frac{1}{2} ac \sin\beta = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{116} \cdot \sqrt{136} \cdot \sin(37{,}23^\circ) = \underline{\underline{38}}$$

oder $A = \frac{1}{2} \left| \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} \right| = \frac{1}{2} \left| \begin{pmatrix} -40 \\ -24 \\ -60 \end{pmatrix} \right| = \frac{1}{2} \sqrt{40^2+24^2+60^2} = \underline{\underline{38}}$

b) A, B und C sind die Spurpunkte der Ebene



$$\rightarrow \quad \underline{\frac{x}{6} + \frac{y}{10} + \frac{z}{4} = 1}$$

oder "via Normalform"

$$\vec{n} = \overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} -40 \\ -24 \\ -60 \end{pmatrix}$$

mit $\vec{n} \circ (\vec{r} - \vec{r}_A) = 0 \rightarrow \begin{pmatrix} -40 \\ -24 \\ -60 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x-6 \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

$$\underline{\underline{E: 10x + 6y + 15z = 60}}$$

c) $g = E \cap \{z = \pm 2\}$ Man setzt $z = \pm 2$ in die Gleichung ein

und z.B. $x = 0 \rightarrow P_1 = (0,5,2) \quad P_2 = (0,15,-2)$

Die Gerade muss parallel zum Vektor $\overrightarrow{BA}$ sein, oder vollstendig in der xy-Ebene liegt.

$$\underline{\underline{g_1: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 6 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix}}} \quad \underline{\underline{g_2: \vec{r} = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ -2 \end{pmatrix}}}$$

d) $K_1: x^2 - 20x + y^2 - 12y + z^2 - 38z = -272$

Quadratische Ergänzung

$$(x-10)^2 + (y-6)^2 + (z-19)^2 = 10^2 + 6^2 + 19^2 - 272 = 225$$

$$M = (10, 6, 19) \qquad r = \sqrt{225} = 15$$

---

e) Abstand Punkt-Ebene mit $M = (10, 6, 19)$ und $E: 10x + 6y + 15z - 60 = 0$

$$d_E(M) = \left| \frac{10 \cdot 10 + 6 \cdot 6 + 15 \cdot 19 - 60}{\sqrt{10^2 + 6^2 + 15^2}} \right| = 19$$

$$K_2: (x-10)^2 + (y-6)^2 + (z-19)^2 = 19^2$$

Berührungspunkt P = Schnittpunkt Lotgerade ℓ durch M und Ebene E

$$\ell: \vec{r} = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} \cap E: 10x + 6y + 15z - 60 = 0$$

$$\rightarrow 10(10 + 10s) + 6(6 + 6s) + 15(19 + 15s) - 60 = 0$$

$$\rightarrow s = -1 \rightarrow P = \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 19 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} = C$$

Konnte man das geometrisch "a priori" bestimmen?

---

f) Bewegungsrichtung = Projektion des g-Vektors $\vec{g} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ auf die Ebene

$$\vec{v} = \vec{g} - \frac{\vec{g} \cdot \vec{n}_E}{n_E} \frac{\vec{n}_E}{n_E} \qquad \left(n_E = \sqrt{10^2 + 6^2 + 15^2} = 19\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{-1 \cdot 15}{19} \cdot \frac{1}{19} \begin{pmatrix} 10 \\ 6 \\ 15 \end{pmatrix} = \frac{1}{19^2} \begin{pmatrix} 150 \\ 90 \\ -136 \end{pmatrix}$$

AKAD.CH

2) $f(x) = 5a^2x^2e^{-ax}$

$f(x)=0 \to x^2=0 \to x=0$ (Doppelte NS)

$f'(x) = 5a^2(2x\cdot e^{-ax} + x^2\cdot(-a)\cdot e^{-ax}) = 5a^2\cdot x\cdot(2-ax)e^{-ax}$

$f'(x)=0 \to x=0$ oder $x=\frac{2}{a}$

$f''(x) = 5a^2((2-2ax)e^{-ax} + (2x-ax^2)(-a)e^{-ax})$

$= 5a^2(a^2x^2-4ax+2)e^{-ax}$

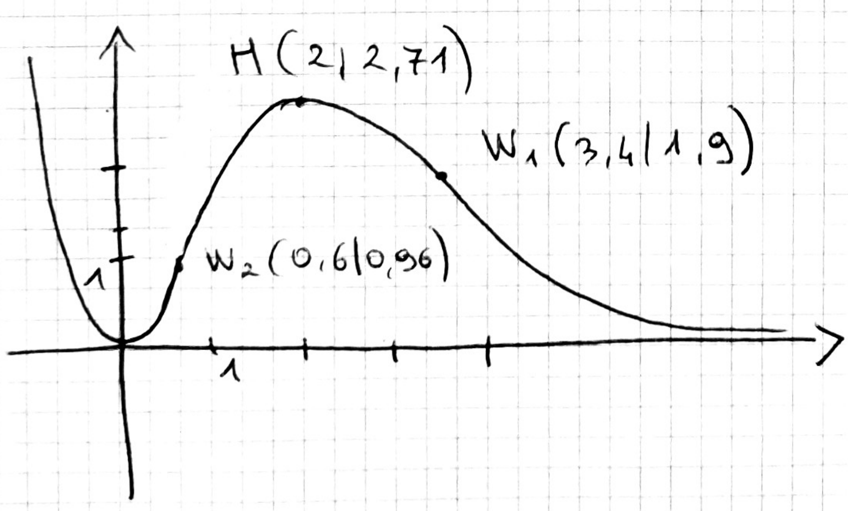
$x=0$ $f(0)=0$ $f''(0) = 10a^2>0$ $T=(0,0)$

$x=\frac{2}{a}$ $f\left(\frac{2}{a}\right) = 20e^{-2}$ $f''\left(\frac{2}{a}\right) = -10a^2e^{-2}<0$ $H\left(\frac{2}{a}, \frac{20}{e^2}\right)$

$f''(x)=0 \to a^2x^2-4ax+2=0 \to x=\frac{4a\pm\sqrt{16a^2-8a^2}}{2a^2} = \frac{2\pm\sqrt{2}}{a}$

Wendepunkte $W_{1,2}=\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{a}, (6\pm4\sqrt{2})e^{-2\mp\sqrt{2}}\right)$

(Gesucht sind jeweils nur die x-Koordinaten)



AKAD

b) Horizontale Abstand

$$\rightarrow \Delta X = \left(\frac{2+\sqrt{2}}{a}\right) - \left(\frac{2-\sqrt{2}}{a}\right) = \frac{2\sqrt{2}}{a}$$

c) siehe oben

$$f\left(\frac{2}{a}\right) = 5a^2 \left(\frac{2}{a}\right)^2 \cdot e^{-a\left(\frac{2}{a}\right)} = 20e^{-2}$$

d) $$\int 5a^2x^2e^{-ax}\,dx = 5a^2\left(x^2 \cdot \frac{e^{-ax}}{-a} - \int 2x \cdot \frac{e^{-ax}}{-a}\right) =$$

$$= 5a\left(-x^2e^{-ax} + 2\int xe^{-ax}\right) = 5a\left(-x^2e^{-ax} + 2\left(x \cdot \frac{e^{-ax}}{-a} - \int 1\right.\right.$$

$$= -\frac{5}{a}e^{-ax}\left(x^2 + 2ax + 2\right) + C$$

e) $$A = \int_2^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{u \to +\infty} F(u) - F(2)$$

$$= 0 + \frac{5}{a}e^{-a \cdot 2}\left(a^2 \cdot 2^2 + 2a \cdot 2 + 2\right) = \frac{5(4a^2+4a+2)}{a}e^{-2a}$$

3) a) a_1) $4 \cdot 6 \cdot 8 \cdot 12 \cdot 20 = 46080$

a_2) Alle Zahlen zwischen $\min = 1+1+1+1+1 = 5$

und $\max = 4+6+8+12+20 = 50$

b) Kombination mit Wiederholung.

$$\left(\!\binom{4}{14}\!\right) = \binom{4+14-1}{14} = \frac{17!}{3!} = 680$$

c) $J: 1+3 \mid 2+2 \mid 3+1$ Egal welcher Körper, nur 3 Kombinationen

$$P = \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{4^2} + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{6^2} + \dots + \frac{1}{5}\cdot\frac{3}{20^2} = \frac{3}{5}\left(\frac{1}{16} + \frac{1}{36} + \dots + \frac{1}{400}\right)$$

$$= \frac{1661}{24000}$$

---

d) Es gibt $\binom{5}{2}$ Paaren, aber nur mit $1d20 + 1d12$ kann man eine Summe über 20 generieren, und zwar als $20+9 \mid 19+10 \mid 18+11 \mid 17+12$

Also $$P = \frac{1}{\binom{5}{2}} \cdot \frac{4}{12\cdot 20} = \frac{1}{600}$$

---

e) Nur möglich mit 1, 2, 3 oder 4

$$P = \frac{4}{4\cdot 6\cdot 8\cdot 12\cdot 20} = \frac{4}{46080} = \frac{11}{11520}$$

---

f) $$P_{max} = \frac{1}{46080}$$

$$P(\Sigma = \max \text{ mind } 1 \text{ mal}) = 1 - P(\Sigma = \max \text{ nie})$$

$$1 - \left(\frac{46079}{46080}\right)^n > 0{,}9 \;\rightarrow\; \left(\frac{46079}{46080}\right)^n < 0{,}1$$

$$n > \log_{\frac{46079}{46080}}(0{,}1) = \frac{\ln 0{,}1}{\ln 46079 - \ln 46080} \simeq 106'10[illegible]$$

---

g) $$P(n=3 \mid OKT) = \frac{1/5 * 1/8}{1/5*(1/4 + 1/6 + 1/8 + 1/12 + 1/20)} = 5/27 = 18{,}5\ \%$$

Alternative zu 4.1.e)

$$z_n = q^n z_0$$

$$s_n = z_{n+1} z_n = z_{n+1} - z_n = q^{n+1} z_0 - q^n z_0 = (q-1) z_0 q^n$$

$$s = \sum_{n=0}^{\infty} |s_n| = \sum_{n=0}^{\infty} \left|(q-1) z_0 q^n\right| = |q-1||z_0| \sum_{n=0}^{\infty} |q|^n = |q-1||z_0| \frac{1}{1-|q|}$$

$$s = |z_0| \frac{|q-1|}{1-|q|}$$

$$q = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \qquad q - 1 = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} i \qquad \Rightarrow |q-1| = |q| = \tfrac{1}{2}\sqrt{2}$$

$$s = |z_0| \frac{|q|}{1-|q|} = \sqrt{68}\, \frac{\frac{1}{2}\sqrt{2}}{1 - \frac{1}{2}\sqrt{2}} = \underline{\underline{\left(2+\sqrt{2}\right)\sqrt{34}}}$$

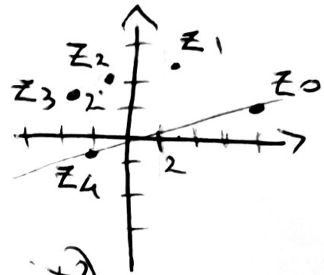
4.1) $z_0 = 8+2i \quad z_{n+1} = z_n \cdot q$

$$q = \frac{z_1}{z_0} = \frac{3+5i}{8+2i} = \frac{(3+5i)(8-2i)}{(8+2i)(8-2i)} = \frac{34+34i}{68} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

a) $z_2 = z_1 \cdot q = (3+5i)\cdot \frac{1}{2}(1+i) = -1+4i$

$z_3 = z_2 \cdot q = (-1+4i)\cdot \frac{1}{2}(1+i) = -\frac{5}{2} + \frac{3}{2}i$

b)



c) $z_4 = -\frac{1}{4} z_0$ (Ist hier eine Ursprungsgerade gemeint?)

d) $z_n = q \cdot z_{n-1} = q(q z_{n-2}) = \dots = q^n z_0 = \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i\right)^n \cdot (8+2i)$

$\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \frac{\sqrt{2}}{2} < 1 \rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} |z_n| = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^n \cdot |z_0| = 0$

e) $\overline{z_0 z_1} = \sqrt{(-5)^2+3^2} = \sqrt{34}$

$\overline{z_1 z_2} = \sqrt{(-4)^2+(-1)} = \sqrt{17} \rightarrow$ Vermutung $\overline{z_n z_{n+1}} = \sqrt{\frac{34}{2^n}}$

$\overline{z_2 z_3} = \sqrt{\left(-\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{5}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{34}}{2}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \overline{z_n z_{n+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \sqrt{\frac{34}{2^n}} = \sqrt{34} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n = \sqrt{34} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = (2+\sqrt{2})\sqrt{34}$$

4.2

a) $\overline{PF} = \overline{Pl}$

$\sqrt{(x-4)^2+(y-3)^2} = |y-(-3)|$

$(x-4)^2 + (y-3)^2 = (y+3)^2$

$y = \frac{1}{12}(x-4)^2$

Oder "geometrisch"
Der Scheitelpunkt liegt "in der Mitte" zwischen F und l
$S = (4,0)$

b) $f(x) = \frac{1}{12}(x-4)^2 \rightarrow f'(x) = \frac{1}{6}(x-4) \rightarrow f'(-2) = -1$

$t: \ y = m_P(x-x_0)+y_0$ mit $P = (x_0, y_0) = (-2,3)$ und $m_P = f'(-2)$

$y = -1(x-(-2)) + 3 = -x+1$

c) Die Symmetrieachse der Parabel ist die vertikale $x=4$ durch $S \rightarrow Q = (10,3)$

Aus der Symmetrie $\rightarrow m_Q = -m_P = 1 \rightarrow y = (x-10)+3$

5.1) a) $\det A = 1\cdot 1 - (-1)(-1) = 0$

Die Matrix ist also singulär (nicht invertierbar)

Die Aufgabe ist unlösbar

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$ hat keine Lösung

b) $$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -1 \\ -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2 - 1 = 0 \rightarrow \lambda^2 - 2\lambda = 0$$

$\lambda_1 = 0 \qquad \lambda_2 = 2$

Zu λ_1 $$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x = y \qquad \vec{e_0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$|\vec{e_0}| = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}$$

Zu λ_2 $$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \rightarrow x = -y \qquad \vec{e_2} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

c) Die Gerade $y = x$ entspricht der Lösungsmenge zu $\lambda_1 = 0$

Sie wird also auf den Nullpunkt abgebildet

d) Die Gerad $y = -x$ ist die Lösung zu $\lambda = 2$, ist also eine Fixgerade

---

5.2) a) Die Dreiecke ODC und OAB sind rechtwinklig und ähnlich mit $OB = 2\,OC$

$$A = A_{OAB} + A_{ODC} = 5 \cdot A_{ODC} = 5 \cdot \frac{1}{2}\,\overline{OD}\cdot\overline{OC}$$

$$= 5 \cdot \frac{1}{2}(2\cdot\cos\alpha)(2\cdot\sin\alpha) = 5\sin(2\alpha)$$

b) $$A = 5\cdot\sin(120^\circ) = \frac{5\sqrt{3}}{2}$$

c) $$A(\alpha) = 5\cdot\sin(2\alpha) \rightarrow A'(\alpha) = 10\cos(2\alpha)$$

Mit $\alpha \in [0, 90^\circ]$ ist $\alpha = 45^\circ$ die einzige Lösung von $A'(\alpha) = 0$ und entspricht einem Maximum.

(Geometrisches Argument möglich)