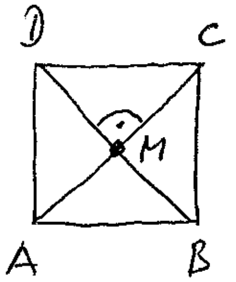
MODELL-LÖSUNG

zu Eidg. Maturitätsprüfung vom Herbst 2001 (Basel) in Mathematik (Typus C)

---

① a)



Idee: ABCD ist Quadrat, falls die Diagonalen AC und BD ....
- gleichen Mittelpunkt M haben,
- gleichlang sind, und
- senkrecht aufeinanderstehen.

Berechnung: - AC hat $M\left(\frac{4+10}{2} \middle| \frac{6+12}{2} \middle| \frac{-5+(-5)}{2}\right) = M(7|9|-5)$

BD " $M\left(\frac{6+8}{2} \middle| \frac{10+8}{2} \middle| \frac{-1-9}{2}\right) = M(7|9|-5)$ ✓

- $|\vec{AC}| = |\vec{r}_C - \vec{r}_A| = \left|\begin{pmatrix} 10-4 \\ 12-6 \\ -5+5 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6^2+6^2+0} = \sqrt{72}$

$|\vec{BD}| = |\vec{r}_D - \vec{r}_B| = \left|\begin{pmatrix} 8-6 \\ 8-10 \\ -9+1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2+(-2)^2+(-8)^2} = \sqrt{72}$ ✓

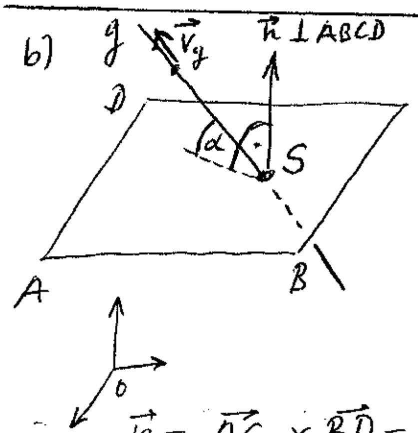
- $\vec{AC} \perp \vec{BD} \iff \vec{AC} \circ \vec{BD} = 0$, $\begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = 6\cdot 2 + 6\cdot(-2) + 0\cdot(-8)$

$= 12 - 12 + 0 = 0$ ✓

d.h. ABCD ist Quadrat.

---

b)



• Schnittpunkt $S = \square ABCD \cap g$:

Zuerst Ebenengleichung von (ABCD) in Koordinatenform:
(Bestimme Normalenvektor $\vec{n} \perp (ABCD)$, den man nachher für die Fortsetzung sowieso braucht:

$$\vec{n} = \vec{AC} \times \vec{BD} = \begin{pmatrix} 6 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -8 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 6 & -2 \end{vmatrix} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48+0 \\ -(-48+0) \\ -12-12 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -48 \\ 48 \\ -24 \end{pmatrix} = 24 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Normalenform von (ABCD) : $-2x + 2y - z + d = 0$

d bestimmen durch einsetzen von z.B $A(4|6|-5)$:

$-2\cdot 4 + 2\cdot 6 - (-5) + d = 0$; $9 + d = 0$; $d = -9$

Damit Ebenengleichung (ABCD): $-2x + 2y - z - 9 = 0 \quad |\cdot(-1)$

$2x - 2y + z + 9 = 0$

Forts. 1 b)

Dann Schnitt $(ABCD) \cap g = S$:

$S(x/y/z) \in (ABCD)$: $\quad 2x - 2y + z + 9 = 0$

$S(x/y/z) \in g$: $\quad \underbrace{\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}}_{\vec{r}_S} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -8 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2+2t \\ y = 2+t \\ z = -8+2t \end{cases}$

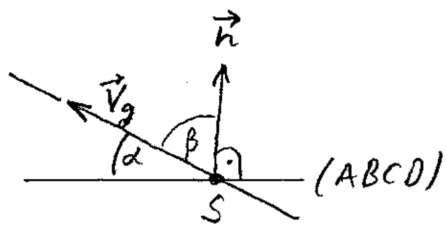
1. Gl.: $2(2+2t) - 2(2+t) + (-8+2t) + 9 = 0$

$\cancel{4} + 4t \cancel{-4} - 2t - 8 + 2t + 9 = 0$; $\quad 4t + 1 = 0$; $\quad t = -\frac{1}{4}$

Eingesetzt in Geradengleichung: $\vec{r}_S = \begin{pmatrix} 2 - \frac{2}{4} \\ 2 - \frac{1}{4} \\ -8 - \frac{2}{4} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,75 \\ -8,5 \end{pmatrix}$

d. h. Schnittpunkt $S(1,5/1,75/-8,5)$

• Schnittwinkel α



$\sphericalangle \alpha = \sphericalangle(g, ABCD) = 90° - \underbrace{\sphericalangle(\vec{n}, \vec{v}_g)}_{\sphericalangle \beta}$

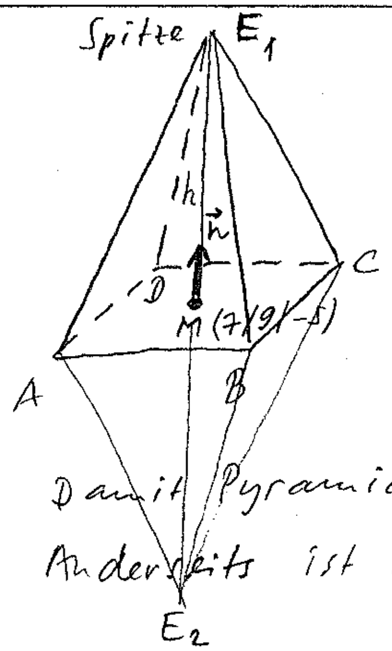
mit $\cos\beta = \frac{\vec{n} \bullet \vec{v}_g}{|\vec{n}| \cdot |\vec{v}_g|} = \frac{\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right|} = \frac{-4+2-2}{(\sqrt{4+4+1})^2}$

$= \frac{-4}{3^2} = \frac{-4}{9} \Rightarrow \beta \approx 116,39°$

Damit $\sphericalangle \alpha = 90° - \beta \approx 26,39°$

---

c)



Ortsvektor für Spitze E: $\vec{r}_E = \vec{r}_M + k \cdot \vec{n}$

$\vec{r}_E = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 - 2k \\ y = 9 + 2k \\ z = -5 - k \end{cases}$

Bedingung für k:

Vol. $V = \frac{G \cdot h}{3} = 108 \Rightarrow G \cdot h = 324$

Grundfläche $G = \overline{AB}^2 = (6-4)^2 + (10-6)^2 + (-1+5)^2 =$
$= 4 + 16 + 16 = 36$

Damit Pyramidenhöhe $h = \frac{324}{36} = 9$

Andererseits ist $h = \overline{ME} = \sqrt{(\cancel{7} - 2k \cancel{-7})^2 + (\cancel{9} + 2k \cancel{-9})^2 + (\cancel{-5} - k \cancel{-(-5)})^2}$

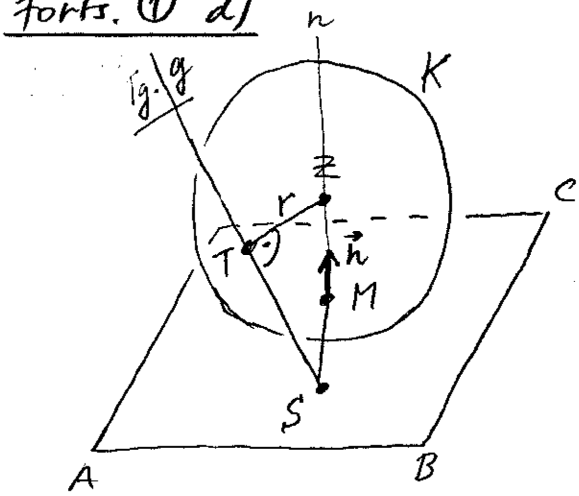
$= \sqrt{4k^2 + 4k^2 + k^2} = \sqrt{9k^2} = 3k = 9$

$k = 3$

$\Rightarrow \vec{r}_{E_1} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7-6 \\ 9+6 \\ -5-3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 15 \\ -8 \end{pmatrix}$ d. h. Spitze $E_1(1/15/-8)$

2. Lösung: $\vec{r}_{E_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} - 3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+6 \\ 9-6 \\ -5+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 13 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} \longrightarrow$ 2. Lös. $E_2(13/3/-2)$

Forts. ① d)



Wähle den konstruktiven Weg, analytisch durchgeführt. → vgl. DG 112 Kap. 3.3

- Tangentenberührungspunkt T

Es gilt: Alle Tangentenabschnitte Δt von einem Punkt (S) ausserhalb einer Kugel K an die Kugel sind gleich lang. Hier $\overline{SM} = \overline{ST}$.

Mit S(1,5/1,75/−8,5) und M(7/9/−5) von oben:

$$\overline{SM} = \sqrt{(7-1{,}5)^2 + (9-1{,}75)^2 + (-5-(-8{,}5))^2} = \sqrt{30{,}25 + 52{,}5625 + 12{,}25}$$

$$\overline{SM} = 9{,}75$$

Ansatz für T: $\vec{r}_T = \vec{r}_S + \overline{SM} \cdot \vec{e}_{\vec{v}_g}$

wobei $\vec{e}_{\vec{v}_g}$ = Einheitsvektor in $\vec{v}_g$-Richtung $= \frac{1}{|\vec{v}_g|} \cdot \vec{v}_g = \frac{1}{\underbrace{\sqrt{2^2+1^2+2^2}}_{3}} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$= \frac{1}{3} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Damit $\vec{r}_T = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}75 \\ -8{,}5 \end{pmatrix} + 9{,}75 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1{,}5 \\ 1{,}75 \\ -8{,}5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6{,}5 \\ 3{,}25 \\ 6{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{T(8/5/-2)}$

- Kugelzentrum Z = (Normale $n \perp ABCD$ durch M) ∩ (Normalebene $N \perp g$ durch T)

Normale n: $\vec{r}_X = \vec{r}_M + t \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Normalebene N: Wegen $N \perp \vec{v}_g = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt Normalengleichung

$N:\ 2x + y + 2z + d = 0$

d bestimmen mittels $T \in N$: $2 \cdot 8 + 5 + 2 \cdot (-2) + d = 0$; $16 + 5 - 4 + d = 0$, $d = -17$

Also $N:\ 2x + y + 2z - 17 = 0$

$Z = n \cap N$: $Z(x/y/z) \in N$: $2x + y + 2z - 17 = 0$

$Z(x/y/z) \in n$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{matrix} x = 7 - 2t \\ y = 9 + 2t \\ z = -5 - t \end{matrix}$

1. Gl.: $2(7-2t) + (9+2t) + 2 \cdot (-5-t) - 17 = 0$

$14 - 4t + 9 + 2t - 10 - 2t - 17 = 0$; $-4t - 4 = 0$; $t = -1$

Also $\vec{r}_Z = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7+2 \\ 9-2 \\ -5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ -4 \end{pmatrix} \rightarrow \underline{Z(9/7/-4)}$

- Kugelradius R $= \overline{ZT} = \sqrt{(8-9)^2 + (5-7)^2 + (-2+4)^2} = \sqrt{1+4+4} = \sqrt{9} = \underline{3}$

- Kugelgleichung 1. Lösung K_1: $(x-9)^2 + (y-7)^2 + (z+4)^2 = 9$

Forts. ① d)

Es gibt noch eine 2. Lösung (Kugel K_2):

Tangentenberührungspunkt $T_2 \in g$ "unterhalb" □ABCD:

$$\vec{r}_{T_2} = \vec{r}_S - \overline{SM} \cdot \vec{e}_{\vec{v}_g} = \begin{pmatrix} 1,5 \\ 1,75 \\ -8,5 \end{pmatrix} - 9,75 \cdot \begin{pmatrix} 2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1,5-6,5 \\ 1,75-3,25 \\ -8,5-6,5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -1,5 \\ -15 \end{pmatrix}$$

d.h. $T_2(-5/-1,5/-15)$

Normalebene $N_2 \perp g$ durch T_2:

Ansatz N_2: $2x + y + 2z + d = 0$

$T_2 \in N_2$: $2\cdot(-5) + (-1,5) + 2(-15) + d = 0$; $-41,5 + d = 0$; $d = +41,5$

Also N_2: $2x + y + 2z + 41,5 = 0 \quad | \cdot 2 \rightarrow 4x + 2y + 4z + 83 = 0$

$Z_2 = N_2 \cap n$: $\quad 4x + 2y + 4z + 83 = 0$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1. Gl.: $4\cdot(7-2t) + 2\cdot(9+2t) + 4\cdot(-5-t) + 83 = 0$

$28 - 8t + 18 + \cancel{4t} - 20 - \cancel{4t} + 83 = 0$; $-8t + 109 = 0$; $t = \frac{109}{8}$

$$\vec{r}_{Z_2} = \begin{pmatrix} 7 \\ 9 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{109}{8} \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 - \frac{109}{4} \\ 9 + \frac{109}{4} \\ -5 - \frac{109}{8} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20,25 \\ +36,25 \\ -18,625 \end{pmatrix} \rightarrow Z_2(-20,25/36,25/-18,625)$$

Kugelradius $R_2 = \overline{Z_2 T_2} = \sqrt{(-5-(-20,25))^2 + (-1,5-(36,25))^2 + (-15-(-18,625))^2}$

$= \sqrt{232,5625 + 1425,0625 + 13,140625} \approx 40,875$

2. Kugelgleichung $K_2: (x + 20,25)^2 + (y - 36,25)^2 + (y + 18,625)^2 \approx 1670,77$

② $K_p: \; y = \frac{2\cdot\sqrt{x-2}}{x^p}$ (Parameter $p > 0$)

a) a1) Definitionsbereich D:

Zähler : $x-2 \geq 0$
Nenner : $x \neq 0$
$\Rightarrow \underline{D = \{x \mid x \geq 2\}}$

a2) Nullstelle x_0:

Bedingung : $y=0$ d.h. $\frac{2\cdot\sqrt{x-2}}{x^p} = 0 \quad \mid \cdot x^p$

$2\cdot\sqrt{x-2} = 0$; $\underline{x_0 = 2}$ ist einzige Schnittstelle mit x-Achse.
Ist unabhängig von Parameter p!
Kurvenschar beginnt bei Punkt $(2/0)$.

a3) Schnittwinkel $\alpha = \sphericalangle(K_p, \text{x-Achse})$

bei der NS. $(2/0)$:

Es gilt : Steigung m bei $x_0 = 2$ = $\tan\alpha$ = 1. Abl. $K_p(x)'\big|_{x=2}$

1. Abl. $K_p(x)' = \left(\frac{\sqrt{4(x-2)}}{x^p}\right)' = \left((4x-8)^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-p}\right)'$

$$= \frac{1}{2}\cdot(4x-8)^{-\frac{1}{2}} \cdot 4 \cdot x^{-p} + (4x-8)^{\frac{1}{2}} \cdot (-p) \cdot x^{-p-1}$$

$\boxed{\text{Produktregel}}$ Kettenregel (innere Abl.)

$$= \frac{2}{\sqrt{4x-8}\cdot x^p} + \frac{\sqrt{4x-8}\cdot(-p)}{x^{p+1}}$$

Damit $\tan\alpha = K_p(x)'\big|_{x=2} = \underbrace{\frac{2}{\underbrace{\sqrt{0}}_{=0}\cdot 2^p}}_{\to\infty} + \underbrace{\frac{\overset{=0}{\sqrt{0}}\cdot(-p)}{2^{p+1}}}_{=0}$

$\tan\alpha \to \infty$ bedeutet $\underline{\underline{\alpha = 90°}}$.

d.h. Kurvenschar $K_p(x)$ geht senkrecht zu x-Achse von NS. $(2/0)$ weg. (Unabhängig von Parameter p).

a4) Verhalten der Kurvenschar $K_p(x)$ am Rande von D

• Beim linken Rand $(x_0 = 2)$:

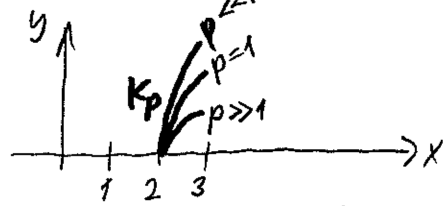
Zähler $2\cdot\sqrt{x-2}$ ist unabhängig von p.

Nenner $(2,\ldots)^p$: $\to \underline{1}$ für $p \to 0$; $= x \approx \underline{2,\ldots}$ für $p = 1$; $\to \underline{\infty}$ für $p \to \infty$

$\Rightarrow$ Je grösser der Wert von p, desto kleiner der y-

Forts. ② a4):

Wert (bei festem $x \approx 2, \dots$). graph: Exponentiell fallend.



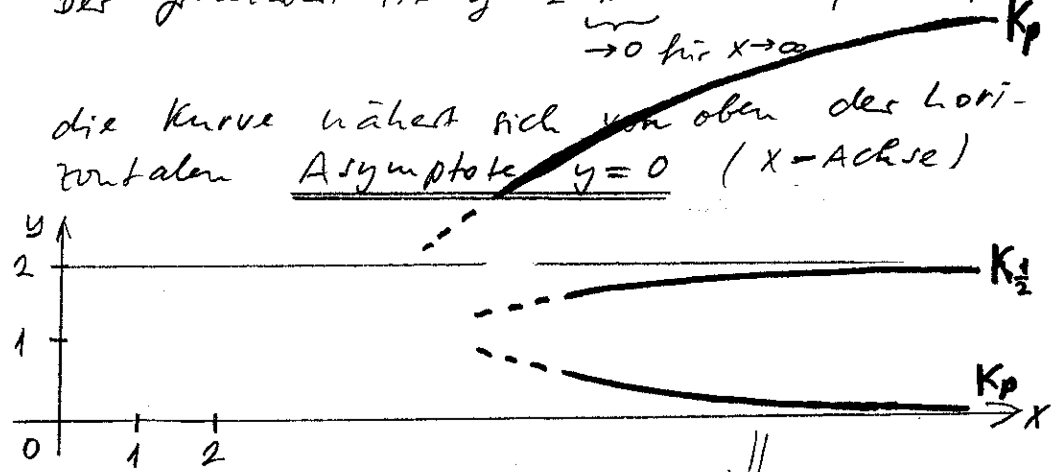
• Beim rechten "Rand" ($x \to \infty$):

$$y = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot\sqrt{x-2}}{x^p} \approx \lim_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x}}{x^p} = \lim_{x\to\infty} \frac{2\cdot x^{\frac{1}{2}}}{x^p} = \lim_{x\to\infty} 2\cdot x^{\overbrace{\frac{1}{2}-p}^{:=\varepsilon}}.$$

Fallunterscheidung:

- $0<p<\frac{1}{2}$: Kurve wächst wie $y \approx 2\cdot x^{\varepsilon>0}$ (Wurzelfunktion) ins Unendliche.
- $p=\frac{1}{2}$: Der Grenzwert ist $y = 2\cdot \underbrace{x^0}_{1} = 2$, d.h. die Kurve nähert sich von unten der horizontalen Asymptote $y=2$.
- $p>\frac{1}{2}$: Der Grenzwert ist $y = 2\cdot \underbrace{x^{\varepsilon<0}}_{\to 0 \text{ für } x\to\infty} = 0$, d.h. die Kurve nähert sich von oben der horizontalen Asymptote $y=0$ (x-Achse)

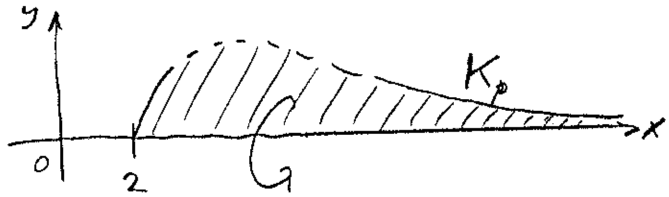
graph:



$\Downarrow$

(Notwendige Voraussetzung: Das Rotationsvolumen V kann gemäss a4) nur endlich sein für $p>\frac{1}{2}$).

b)



Dieser endliche Wert beträgt

$$V = \pi\cdot\int_2^\infty (K_p(x))^2\cdot dx = \pi\cdot\int_2^\infty \left(\frac{2\cdot\sqrt{x-2}}{x^p}\right)^2\cdot dx = \pi\cdot\int_2^\infty \frac{4(x-2)}{x^{2p}}\cdot dx$$

$$= 4\pi\cdot\int_2^\infty \left(\frac{x}{x^{2p}} - \frac{2}{x^{2p}}\right)dx = 4\pi\cdot\int_2^\infty \left(x^{-2p+1} - 2\cdot x^{-2p}\right)dx$$

$$= 4\pi\cdot\left[\frac{1}{-2p+2}\cdot x^{-2p+2} - \frac{2}{-2p+1}\cdot x^{-2p+1}\right]_2^\infty$$

Wenn man die obere Grenze ∞ für x einsetzt, gibt es nur dann einen endlichen Integralwert wenn Exponent $-2p+2$ bzw. $-2p+1$ negativ ist, nämlich den Integralwert 0.

Forts. ② b):

D.h. das Volumen V ist endlich, falls

$$\underbrace{-2p+2<0} \quad \text{und} \quad -2p+1<0$$

$$\Rightarrow \quad 2<2p;\ \underline{p>1} \quad \text{und} \quad 1<2p;\ \underline{p>\tfrac{1}{2}}$$

$\Rightarrow$ **für $p>1$ ist Vol. V endlich** . (Hinreichende Bedingung)

Dann gilt:

$$V=4\pi\cdot\Bigg(\underbrace{\Big(\underbrace{\frac{1}{-2p+2}\cdot x^{-2p+2}}_{\substack{=0 \text{ für}\\ x\to\infty}}-\underbrace{\frac{2}{-2p+1}\cdot x^{-2p+1}}_{\substack{=0 \text{ für}\\ x\to\infty}}\Big)}_{F(\infty)}-\underbrace{\Big(\frac{1}{-2p+2}\cdot 2^{-2p+2}-\frac{2}{-2p+1}\cdot 2^{-2p+1}\Big)}_{F(2)}\Bigg)$$

$$=4\pi\cdot\left(-\frac{2^{-2p+2}}{-2p+2}+\frac{2\cdot 2^{-2p+1}}{-2p+1}\right)=\underbrace{4}_{=2^2}\pi\cdot 2^{-2p+2}\cdot\left(\frac{1}{2p-2}+\frac{1}{-2p+1}\right)$$

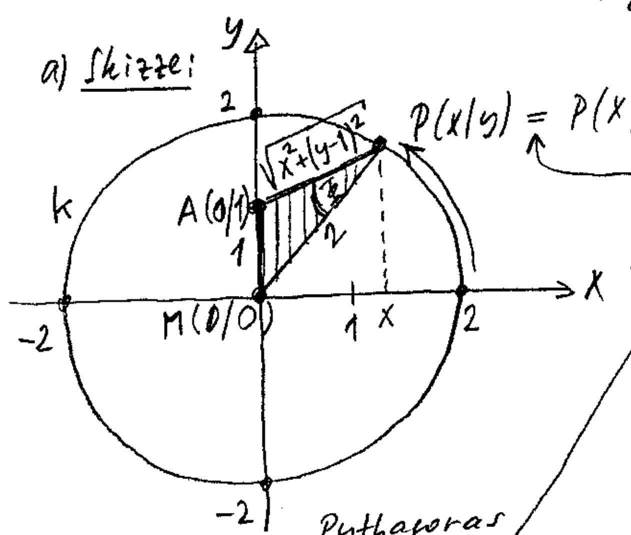
$$=\pi\cdot 2^{-2p+4}\cdot\left(\frac{(-2p+1)+(2p-2)}{(2p-2)\cdot(-2p+1)}\right)=\pi\cdot 2^{-2p+4}\cdot\left(\frac{-1}{-4p^2+2p+4p-2}\right)=$$

$\boxed{\text{umgeformt}}$

$$=\pi\cdot 2^{-2p+4}\cdot\frac{1}{\underbrace{4p^2-6p+2}_{2\cdot(2p^2-3p+1)}}=\underline{\underline{\frac{\pi\cdot 2^{-2p+3}}{2p^2-3p+1}}}=\text{Vol. } V(p)$$

$$(p>1)$$

③ a) Skizze:



$P(x|y) = P(x|\sqrt{4-x^2})$

Kreispunkt-Bedingung $P \in k(M, r=2)$:

$$\left\{\begin{array}{l} x^2+y^2 = 2^2 \\ \Rightarrow\ y = \sqrt{4-x^2} \end{array}\right.$$

Cosinussatz auf ΔMAP angewendet:

$$\overline{MA}^2 = \overline{MP}^2 + \overline{AP}^2 - 2\cdot\overline{MP}\cdot\overline{AP}\cdot\cos\Phi$$

$$1^2 = 2^2 + \overline{AP}^2 - 2\cdot 2\cdot\overline{AP}\cdot\cos\Phi$$

bestimmen

Pythagoras

Seite $\overline{AP} = \sqrt{x^2+(y-1)^2} =$

$$= \sqrt{x^2+y^2-2y+1} = \sqrt{\cancel{x^2}+4-\cancel{x^2}-2\sqrt{4-x^2}+1} = \sqrt{5-2\sqrt{4-x^2}}$$ eingesetzt

in Formel von Cosinussatz:

$$1 = 4 + (5-2\cdot\sqrt{4-x^2}) - 4\cdot\cos\Phi\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{4-x^2}}$$

Diese Formel nach Winkel Φ aufgelöst:

$$4\cdot\cos\Phi\cdot\sqrt{5-2\sqrt{4-x^2}} = 8-2\sqrt{4-x^2}$$

$$\cos\Phi(x) = \frac{8-2\cdot\sqrt{4-x^2}}{4\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{4-x^2}}} = \frac{4-\sqrt{4-x^2}}{2\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{4-x^2}}}$$

$\boxed{\text{mit 2 gekürzt}}$

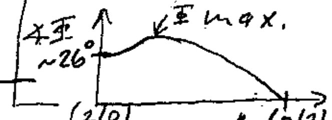
Angewendet auf den gegebenen Kreispunkt $P_1(1/\sqrt{3})$:

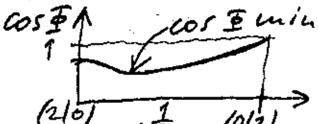
$$\cos\Phi = \frac{4-\sqrt{4-1^2}}{2\cdot\sqrt{5-2\cdot\underbrace{\sqrt{4-1^2}}_{\sqrt{3}}}} = \frac{4-\sqrt{3}}{2\cdot\sqrt{5-2\sqrt{3}}} \approx 0{,}915002$$

$\sphericalangle\Phi = \arccos 0{,}915002 \approx \underline{\underline{23{,}794°}}$ misst der Winkel bei P_1.

---

b) Extremwertaufgabe: → Punkt P wandert auf Kreisbogen im 1. Quadrant von Pkt. (2|0) nach $P_0(0|2)$: → Qualitatives Verhalten von $\sphericalangle\Phi$:





Bed.: $(\cos\Phi)' = 0$

(cos Φ minimal)

Von a):

$$(\cos\Phi(x))' = \left(\frac{4-\sqrt{4-x^2}}{2\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{4-x^2}}}\right)' = \left(\frac{4-(4-x^2)^{\frac{1}{2}}}{2\cdot\left[5-2\cdot(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]^{\frac{1}{2}}}\right)'$$

$$= \frac{\left[-\frac{1}{2}(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\right]\cdot\left[2\cdot(5-2(4-x^2)^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}}\right] - \left[4-(4-x^2)^{\frac{1}{2}}\right]\cdot\left[2\cdot\frac{1}{2}(5-2(4-x^2)^{\frac{1}{2}})^{-\frac{1}{2}}\cdot\left(-2\cdot\frac{1}{2}\cdot(4-x^2)^{-\frac{1}{2}}\cdot(-2x)\right)\right]}{4\cdot(5-2(4-x^2)^{\frac{1}{2}})}$$

$\boxed{\text{Quotientenregel}}$

= innere Ableitung von Nenner

$$= \frac{\dfrac{x\cdot 2\cdot\sqrt{5-2\sqrt{4-x^2}}}{\sqrt{4-x^2}} - \dfrac{(4-\sqrt{4-x^2})\cdot 2x}{\sqrt{5-2\sqrt{4-x^2}}\cdot\sqrt{4-x^2}}}{4\cdot(5-2(4-x^2)^{\frac{1}{2}})}$$

$\boxed{\text{Auf Wurzelschreibweise zurückwechseln}}$

Forts. 3 b)

$$\left(\cos \Phi(x)\right)' = \frac{\dfrac{2x\cdot\left(5-2\sqrt{4-x^2}\right) - 2x\cdot\left(4-\sqrt{4-x^2}\right)}{\sqrt{5-2\sqrt{4-x^2}}\cdot\sqrt{4-x^2}}}{4\cdot\left(5-2\sqrt{4-x^2}\right)}$$

Zähler gleichnamig machen

Doppelbruch beseitigen

$$= \frac{2x\cdot\left[5-2\sqrt{4-x^2}-4+\sqrt{4-x^2}\,\right]}{\sqrt{5-2\cdot\sqrt{4-x^2}}\cdot\sqrt{4-x^2}\cdot 4\cdot\left(5-2\sqrt{4-x^2}\right)}$$

$$= \frac{2x\cdot\left(1-\sqrt{4-x^2}\right)}{4\cdot\sqrt{4-x^2}\cdot\sqrt{\left(5-2\cdot\sqrt{4-x^2}\right)^3}} = 0 \qquad \Big|\cdot \text{Nenner}$$

Diese Gleichung nach x aufgelöst:

$2x\cdot\left(1-\sqrt{4-x^2}\right) = 0 \Rightarrow$ entweder $x=0$ [$\Rightarrow \Phi = 0$ ist das Minimum]

oder $1-\sqrt{4-x^2}=0$; $\sqrt{4-x^2}=1$; $4-x^2=1$; $-x^2=-3$;

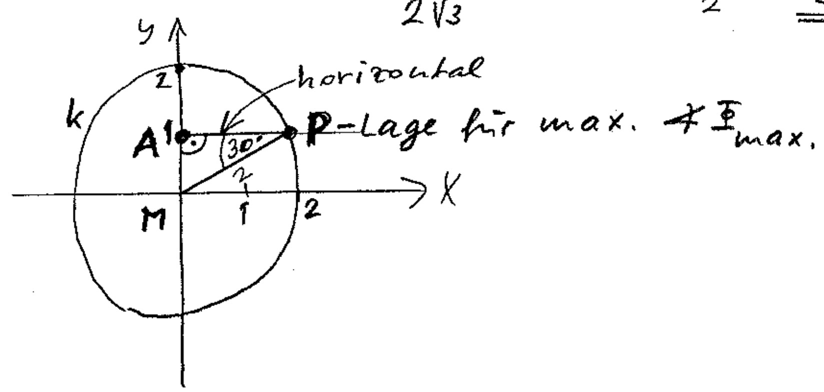
$x^2=3$; $\underline{x = \overset{+}{(-)}\sqrt{3}}$

zugehöriger y-Wert $= \sqrt{4-\underbrace{3}_{x^2}} = \sqrt{1} = 1$

d. h. Winkel Φ wird am grössten bei Kreispunkt $P(\sqrt{3}/1)$.

[Nicht gefragt: Bei diesem Punkt misst der maximale Winkel $\Phi_{max} = \arccos \dfrac{4-\sqrt{4-3}}{2\cdot\sqrt{5-2\cdot\sqrt{4-3}}} = \arccos\dfrac{3}{2\cdot\sqrt{5-2}} =$

$= \arccos\dfrac{3}{2\sqrt{3}} = \arccos\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \underline{\underline{30°}}$]



④ $f: w = \frac{a\cdot z - 2}{z^2}$ $(a \in \mathbb{C})$

a) $f: w = -\frac{2}{z^2}$ $(a = 0)$

Bedingung für Fixpunkte: $\overbrace{f(z)}^{w} = z$ d.h. $\underline{-\frac{2}{z^2} = z}$ $|\cdot z^2$

Diese Gleichung nach z aufgelöst:

$z^3 = \underbrace{-2}_{:=b}$ mit $b = 2\cdot \text{cis } 180°$ in Polarform.

Damit Lösung z mit Betrag $r = \sqrt[3]{2} \approx 1{,}260$

und Argumente $\varphi_k = \frac{180° + k\cdot 360°}{3} = 60° + k\cdot 120°$ $(k = 0,1,2)$

d.h. 3 Fixpunkte

$$\underline{z_1 = \sqrt[3]{2}\cdot \text{cis } 60°} = \underline{\underbrace{\frac{\sqrt[3]{2}}{2}}_{0{,}630} + i\cdot \underbrace{\frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}}_{1{,}091}}$$

$$\underline{z_2 = \sqrt[3]{2}\cdot \text{cis } 180°} = -\sqrt[3]{2} \approx \underline{-1{,}260 \text{ (reell)}}$$

$$\underline{z_3 = \underbrace{\sqrt[3]{2}}_{\approx 0{,}630}\cdot \text{cis } 300°} = \underline{\frac{\sqrt[3]{2}}{2} - i\cdot \frac{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{3}}{2}} \approx 0{,}630 - i\cdot 1{,}091$$

---

b) • Definitionsbereich $\underline{D = \mathbb{C} \setminus \{0\}}$

• Parameter a

Bedingung für a: $f(i) = 4$ d.h. $\frac{a\cdot i - 2}{i^2} = 4$

$\Leftrightarrow \frac{a\cdot i - 2}{-1} = \underbrace{2 - ai = 4}$

Diese Gleichung nach Parameter a aufgelöst:

$-a\cdot i = 2$; $a = \frac{2}{(-i)} = \frac{2\cdot i}{(-i)\cdot i} = \frac{2i}{1} = 2i$

d.h. $\underline{\text{Parameter } a = 2i}$

Probe: $f(i) = \frac{2i\cdot i - 2}{i^2} = \frac{-2-2}{-1} = 4$ ✓

---

c) • Abbildungsgleichungen bestimmen:

$f: w = \frac{2i\cdot z - 2}{z^2}$; $u + iv = \frac{2i(x+iy) - 2}{(x+iy)^2}$

Rechte Seite umgeformt (so dass Form $Re + i\cdot Im$ herauskommt):

$$u + iv = \frac{2x\cdot i + 2i^2 y - 2}{(x+iy)^2} \underset{\text{erweitern}}{\overset{}{=}} \frac{[(-2y-2) + 2x\cdot i]\cdot(x-iy)^2}{(x+iy)^2\cdot(x-iy)^2}$$

$$= \frac{[(-2y-2) + 2x\cdot i]\cdot[(x^2-y^2) - 2xy\cdot i]}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(-2y-2)(x^2-y^2) - (2y-2)\cdot 2xy\cdot i + 2x(x^2-y^2)\cdot i + 4x^2y}{(x^2+y^2)^2}$$

$$= \frac{(-2x^2y + 2y^3 - 2x^2 + 2y^2 + 4x^2y) + i\cdot(-4xy^2 + 4xy + 2x^3 - 2xy^2)}{(x^2+y^2)^2}$$

Forts. 4 c)

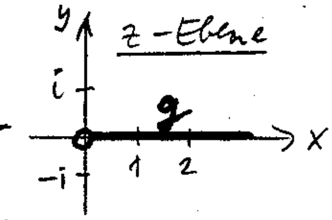
$$= \frac{(2x^2y + 2y^3 - 2x^2 + 2y^2) + i\cdot(-6xy^2 + 4xy + 2x^3)}{(x^2+y^2)^2}$$

$\Rightarrow$ Realteile gleichgesetzt: $u = \dfrac{2(x^2y - x^2 + y^3 + y^2)}{(x^2+y^2)^2}$

und

Imaginärteile gleichgesetzt: $v = \dfrac{2\cdot(-3xy^2 + 2xy + x^3)}{(x^2+y^2)^2}$

sind die Abbildungsgleichungen dieser Funktion



- Bild f(g) von g: $y = 0$ (mit $x > 0$)

setze $y = 0$ in Abb. gleichungen ein:

$$u = \frac{2\cdot(-x^2)}{x^{\cancel{4}2}} = \frac{-2}{x^2}$$

$$v = \frac{2\cdot(+x^3)}{x^{\cancel{4}1}} = \frac{2}{x}$$

ist die gesuchte Bildkurve f(g) in Parameterform.

Übergang zur Koordinatenform, indem der Parameter x eliminiert wird:

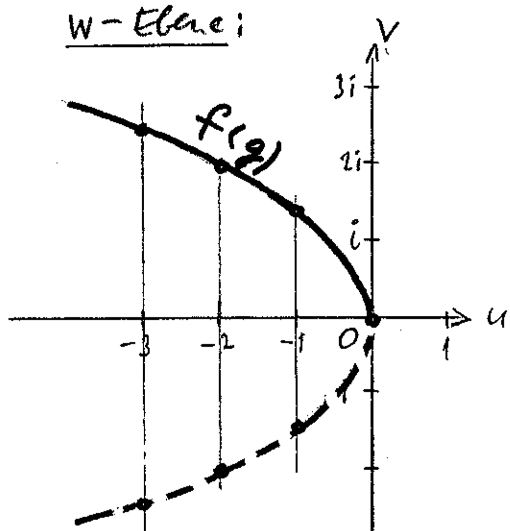
2. gl.: $x = \frac{2}{v}$ in 1. gl. eingesetzt:

$\to$ 1. gl.: $u = \dfrac{-2}{(\frac{2}{v})^2} = \dfrac{-2}{\frac{4}{v^2}} = \dfrac{-2v^2}{4} = \dfrac{-v^2}{2}$

Nach v aufgelöst: $-v^2 = 2u$; gesuchte Bildkurvengleichung: $\boxed{v^2 = -2u}$

Ist Parabelgleichung (nach links geöffnet).

W-Ebene:

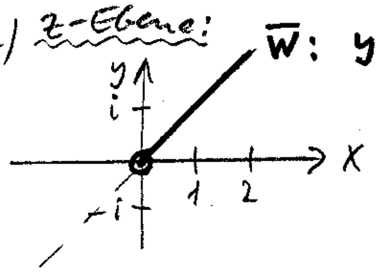


u	1	0	-1	-2	-3
v	–	0	$\pm\sqrt{2} \approx \pm 1{,}4$	± 2	$\pm\sqrt{6} \approx 2{,}4$

Bei Parameterform $u = \dfrac{-2}{x^2}$, $v = \dfrac{2}{x}$

wird klar, dass für $x > 0$ $u < 0$ und $v > 0$ wird, d.h. nur der obere Parabelteil ist Bildkurve von g.

d) z-Ebene: $\overline{W}$: $y = x$

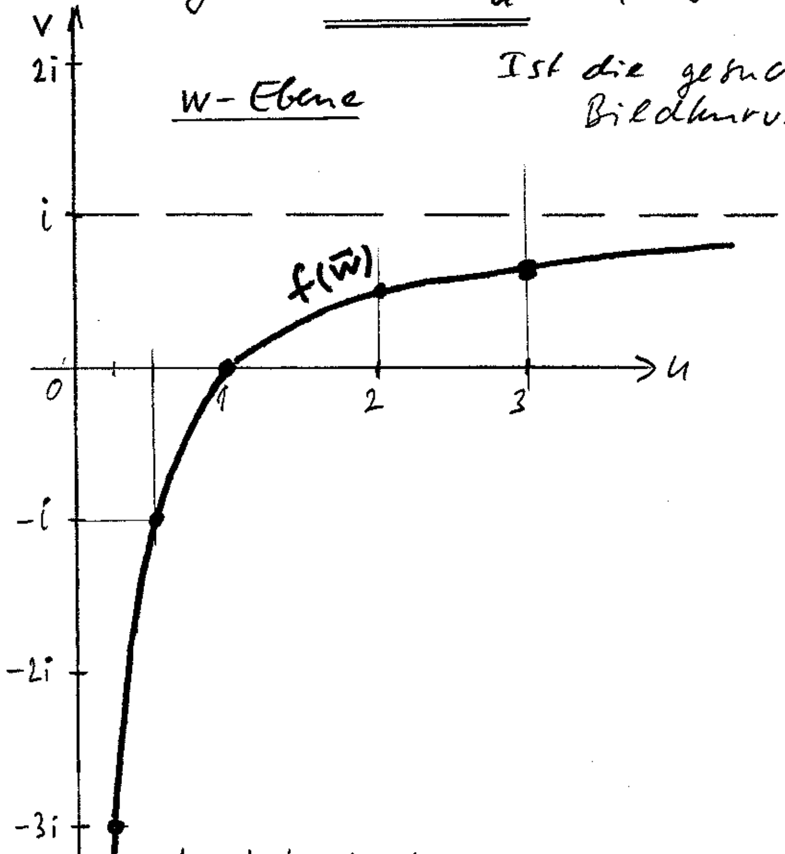


Für die Winkelhalbierende $\overline{W}$ mit Geradengleichung $y = x$ $(x>0)$ im 1. Quadranten gilt bei den Abbildungsgleichungen bei 4 c) oben:

Forts. 4 d)

$$\left.\begin{aligned} u &= \frac{2\cdot(x^3 \cancel{-x^2} + x^3 \cancel{+x^2})}{(x^2+x^2)^2} = \frac{4x^3}{(2x^2)^2} = \frac{\cancel{4x^3}}{\cancel{4x^4}\,x} = \frac{1}{x} \\ v &= \frac{2\cdot(-3\cdot x^3 + 2x^2 + x^3)}{4x^4} = \frac{2\cdot(-2x^3+2x^2)}{4x^4} = \frac{\cancel{4x^2}(-x+1)}{\cancel{4x^2}} = 1 - x \end{aligned}\right\}$$

Ist wieder die Parameterform der gesuchten Bildkurvengleichung $f(\bar{w})$. Übergang zur Koordinatenform durch Eliminieren von Parameter x: 1. Gl.: $x = \frac{1}{u}$
$\rightarrow$ 2. Gl.: $\underline{\underline{v = 1 - \frac{1}{u}}}$ (wegen $x > 0$ ist auch $\underline{u > 0}$)



Ist die gesuchte Gleichung der Bildkurve von $f(\bar{w})$.

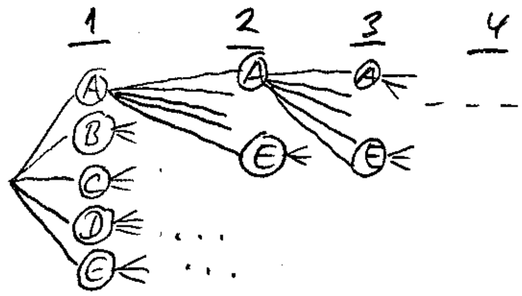
Es handelt sich um den rechten <u>Hyperbelast</u> der an der x-Achse gespiegelten und um 1 Einheit nach oben verschobenen Hyperbel $v = \frac{1}{u}$.

$v = 1$ bzw. $w = i$ ist <u>horizontale Asymptote</u>, die v-Achse <u>vertikale Asymptote</u> der Kurve mit Nullstelle $u = 1$.

u	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	1	2	3
v	-3	-1	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{3}$

(5) Seien A, B, C, D, E die 5 Abteile und 1, 2, 3, 4, 5 die 5 Personen. (Info. "6 Plätze pro Abteil nicht relevant).

a) Reduziertes Baumdiagramm:

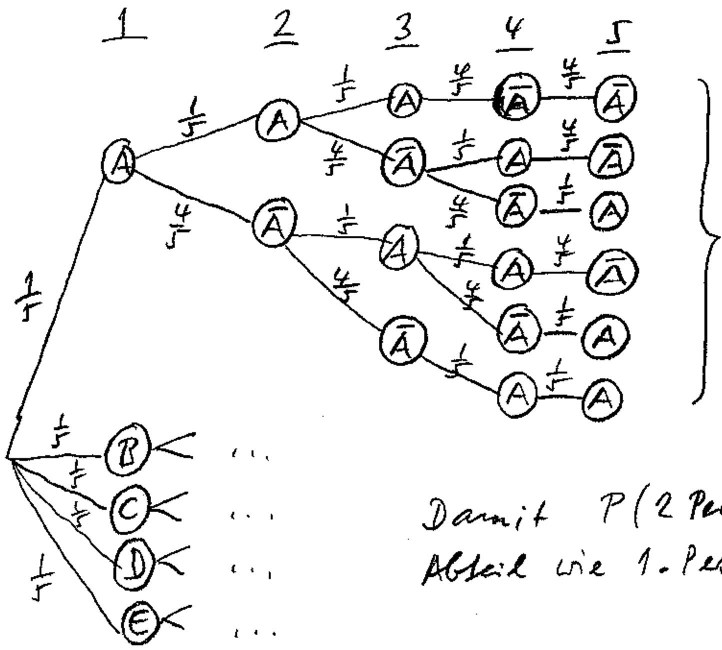


Nach Produktregel:
Auf $5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 5^5$
$= 3125$ versch. Arten
können Abteile belegt werden.

---

b)

$\bar{A}$ = Abteil B, C, D od. E



P(1. Pers. geht in Abt. A)
$= 6 \cdot \left(\frac{1}{5}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^2 = \frac{96}{5^5}$

Damit P(2 Pers. wählen gleiches Abteil wie 1. Person) $= 5 \cdot \frac{96}{5^5} = \frac{96}{5^4} = \frac{96}{625}$
$= 15{,}36\ \%$

---

c) • Kein Abteil bleibt leer:

$P(0) = \frac{g}{m}$ mit $m = 5^5 = 3125$

$g = \underbrace{\text{Permutation } P_5}_{\text{Pro Abteil genau 1 Person}} = 5! = 120$

$P(0) = \frac{120}{3125}$

• 1 Abteil bleibt leer:

E leer: A B C D Produktregel:

1 Pers. – 1 Pers. – 1 P. – 2 P. → $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$ Mögl.
1 P. – 1 P. – 2 P. – 1 P. → " 60 M.
1 P. – 2 P. – 1 P. – 1 P. → " 60 M.
2 P. – 1 P. – 1 P. – 1 P. → " 60 M.

240 Mögl.

Analog:
D leer: dito: 240 Mögl.
C leer: " : 240
B leer: " : 240
A leer " : 240

Damit $g = 5 \cdot 240 = 1200$

$\rightarrow P(1) = \frac{1200}{3125}$

Forts. 5 c)

- **2 Abteile bleiben leer:**

Kombination ohne Wiederhol.

Produktregel:

D+E leer:

A	B	C	
3 Pers.	1 P.	1 P.	$\rightarrow C(3,5)\cdot 2 = \underbrace{\binom{5}{3}}_{10}\cdot 2 = 20$ Mögl.
1 P.	3 P.	1 P.	$\rightarrow$ " 20 "
1 P.	1 P.	3 P.	$\rightarrow$ " 20 "
2 P.	2 P.	1 P.	$\rightarrow C(2,5)\cdot C(2,3)\cdot 1 = \underbrace{\binom{5}{2}}_{10}\cdot\underbrace{\binom{3}{2}}_{3} = 30$ Mögl.
2 P.	1 P.	2 P.	$\rightarrow$ " 30 "
1 P.	2 P.	2 P.	$\rightarrow$ " 30 "

} 150 Mögl.

$C(2,5)$ Paare $= \binom{5}{2} = 10$

Analog:
C+E leer
B+E leer
⋮
AB leer

$\longrightarrow$ d.h. $g = 10\cdot 150 = 1500$

und $P(2) = \frac{g}{m} = \frac{1500}{3125}$

- **3 Abteile bleiben leer:**

C+D+E leer:

A	B	
4 Pers.	1 Pers.	$\rightarrow C(4,5) = \binom{5}{4} = \frac{5\cdot4\cdot3\cdot2}{4!} = 5$ Mögl.
3 P.	2 P.	$\rightarrow C(3,5) = \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10$ M.
2 P.	3 P.	$\rightarrow C(2,5) = \binom{5}{2} = 10$ M.
1 P.	4 P.	$\rightarrow C(1,5) = \binom{5}{1} = 5$ M.

} 30 Mögl.

$C(3,5)$ Tripel $= \binom{5}{3} = \frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10$

Analog:
B+D+E leer: $\rightarrow$ 30 Mögl.
A+D+E leer: $\rightarrow$ 30 "
⋮
A+B+C leer: $\rightarrow$ 30 "

$\rightarrow$ d.h. $g = 10\cdot 30 = 300$

und $P(3) = \frac{g}{m} = \frac{300}{3125}$

- **4 Abteile bleiben leer**

d.h. alle 5 Pers. in A bzw. B usw. $\rightarrow g = 5 \rightarrow P(4) = \frac{5}{3125}$

Zusammenstellung:

W (Anzahl leere Abteile)	0	1	2	3	4	5
W'keit P(w	$\frac{120}{3125}$	$\frac{1200}{3125}$	$\frac{1500}{3125}$	$\frac{300}{3125}$	$\frac{5}{3125}$	0

Kontrolle: $\Sigma = \frac{3125}{3125} = 1$ ✓

Damit:

(i) P(höchstens 1 Abteil leer) $= P(0) + P(1) = \frac{120+1200}{3125} = \frac{1320}{3125} = \frac{264}{625} \mathrel{\widehat{=}} 42{,}24\%$

(ii) Mittelwert = Erwartungswert $= 0\cdot\frac{120}{3125} + 1\cdot\frac{1200}{3125} + 2\cdot\frac{1500}{3125} + 3\cdot\frac{300}{3125} + 4\cdot\frac{5}{3125}$

$= \frac{5120}{3125} = 1{,}6384$

d.h. im Mittel bleiben 2 Abteile leer.