

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Die maximale Punktesumme braucht für die Note 6 nicht erreicht zu werden.

MATHEMATIK

TYPUS C

- Gegeben ist die Funktion $f(x) = (x+t)e^{t-x}$, $x \in \mathbb{R}$, $t \in \mathbb{R}$ und G_f sei ihr Graph.
 - Wenn t die reellen Zahlen durchläuft, bewegt sich der Hochpunkt von G_f auf einer Kurve K . Bestimmen Sie die Gleichung von K .
 - Für welchen Wert von t liegt der Wendepunkt von G_f auf der y -Achse?
 - Die dritte Ableitungsfunktion von f hat die Gleichung $f^{(3)}(x) = -e^{t-x}(t+x-3)$. Vermuten Sie eine allgemeine Formel für die Gleichung der n -ten Ableitungsfunktion von f und beweisen Sie die Formel mit vollständiger Induktion.
 - Es sei x_0 die Nullstelle von f . Bestimmen Sie $J(u) = \int_{x_0}^u f(x) dx$; $u > x_0$ und danach $\lim_{u \rightarrow \infty} J(u)$.
- Gegeben sind die Gerade g , die Ebene E und die Kugel K .
 $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3+3t \\ -3+4t \\ -7+2t \end{pmatrix}$; $E: 4x + y + 8z - 49 = 0$; $K: (x-5)^2 + (y-2)^2 + (z-9)^2 = 169$
 - Beweisen Sie, dass die Gerade g Kugeltangente ist, und berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes P .
 - Bestimmen Sie die Parametergleichung derjenigen Tangente an K im Punkt P , die parallel zu E ist.
 - Die Ebene E schneidet die Kugel K in einem Kreis k . Berechnen Sie die Mittelpunktskoordinaten und den Radius von k .
- Gegeben ist die komplexe Funktion $w = f(z) = z - \frac{3}{z}$, $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Es bezeichne $w = f(z) = u + iv$.
 - Welche Punkte der z -Ebene werden auf $w = 4i$ abgebildet?
 - Bestimmen Sie das Bild des Einheitskreises und skizzieren Sie das Bild in der w -Ebene.
 - Bestimmen Sie das Bild der Geraden $z = t(1+i)$, $t \in \mathbb{R}$ und skizzieren Sie das Bild in der w -Ebene.

4. Unter 20 Losen hat es noch genau 5 Treffer.
Jemand kauft 4 Lose nacheinander.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass erst das vierte Los ein Treffer ist?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass höchstens ein Treffer gezogen wurde?
 - Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass das fünfte gezogene Los ein Treffer ist, wenn unter den vier vorangehenden Losen höchstens ein Treffer gezogen wurde?
 - Wie viele Treffer müsste es unter den verbleibenden 16 Losen noch mindestens haben, dass beim Kauf zweier Lose die Wahrscheinlichkeit für mindestens einen Treffer grösser als $\frac{1}{2}$ ist?

5. Einem Drehkegel mit halbem Öffnungswinkel α ,
 $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ wird eine Kugel einbeschrieben. Die Kugel

wird mit dem Drehkegel der Höhe 1 geschnitten.

- Für welchen Kugelradius hat der Schnittkörper maximalen Oberflächeninhalt?
- Für welche Winkel α ist der Schnittkörper aus a) eine Kugel?

