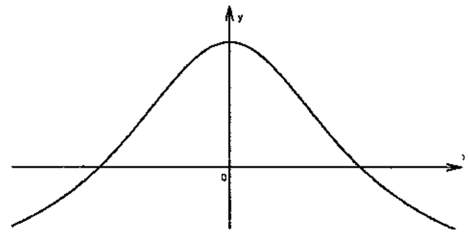
Aufgabe 1a $\displaystyle\int_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}}\left(\frac{4}{1+a^2x^2}-2\right)dx=\left[\tfrac{4}{a}\arctan(ax)-2x\right]_{-\frac{1}{a}}^{\frac{1}{a}}=\underline{\underline{\frac{2\pi-4}{a}}}.$

Aufgabe 1b $f'(x)=\dfrac{-8a^2x}{(1+a^2x^2)^2}.$

$f'(\tfrac{1}{a})=\dfrac{-8a^2\cdot\frac{1}{a}}{(1+a^2\frac{1}{a^2})^2}=$

$=-2a\underbrace{=\pm1}_{\text{soll}}, a\in\mathbb{R}^+ \quad\Rightarrow\quad \underline{\underline{a=\tfrac{1}{2}}}$



Aufgabe 1c $\displaystyle\int_0^2\pi x^2dy=\frac{\pi}{a^2}\int_0^2\left(\frac{4}{y+2}-1\right)dy=\frac{\pi}{a^2}\left[4\ln(y+2)-y\right]_0^2=\underline{\underline{\frac{\pi}{a^2}(\ln16-2)}}\approx\frac{2.427}{a^2}$

Aufgabe 2a Lot von S auf mit E schneiden liefert $\underline{\underline{M(0\,|\,1\,|\,3)}}$. Der Punkt A, der ja in E liegen muss, hat die Koordinaten $A(-2\,|\,-1\,|\,4)$. Daraus folgt $\overline{AM}=\underline{\underline{R=3}}$.

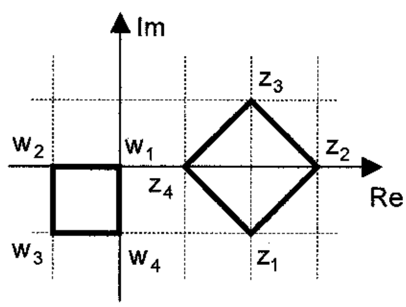
Aufgabe 2b Um den "tiefsten Punkt" des Grundkreises zu finden, suchen wir den "steilsten Radius" des Grundkreises. Zunächst finden wir wie folgt einen horizontalen Vektor in E: $\vec{h}=\vec{e}_3\times\vec{n}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$. Der gesuchte Radius steht senkrecht zu $\vec{h}$ und liegt in E. Ein Vektor in seiner Richtung ist $\vec{f}=\vec{h}\times\vec{n}=\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}$. Wir verkürzen $\vec{f}$ auf die Länge R: $\vec{r}=\frac{R}{|\vec{f}|}\cdot\vec{f}=\frac{3}{\sqrt{36}}\cdot\begin{pmatrix}4\\4\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$. Heftet man $\vec{r}$ (mit passendem Vorzeichen) bei M an, erhält man den tiefsten Kreispunkt $T(2\,|\,3\,|\,2)$. Senkrecht darunter liegt der gesuchte Punkt $\underline{\underline{T'(2\,|\,3\,|\,0)}}$.

Aufgabe 2c Die gedrehte Ebene E' geht durch O, M und A Ihr Normalenvektor ist also $\overrightarrow{0M}\times\overrightarrow{0A}=\begin{pmatrix}0\\1\\3\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-2\\-1\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\-6\\2\end{pmatrix}$. Der gesuchte Drehwinkel δ ist der Winkel zwischen den Ebenen E und E', folglich auch zwischen deren Normalenvektoren. Wir erhalten

$$\cos\delta=\left|\frac{\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}7\\-6\\2\end{pmatrix}}{|\ldots|\cdot|\ldots|}\right|=\frac{9}{\sqrt{18}\cdot\sqrt{89}}\quad\Rightarrow\quad\underline{\underline{\delta=77.0^\circ}}$$

Aufgabe 3a Einsetzen und zeigen, dass null herauskommt. Weil das Polynom lauter <u>reelle Koeffizienten</u> hat, muss auch die konjugiert komplexe Zahl Lösung sein. Wir haben also $z_1=2-i$ und $\underline{\underline{z_3=2+i}}$. Das Polynom ist somit ohne Rest durch das Produkt $(z-z_1)(z-z_2)=(z-2+i)(z-2-i)=(z^2-4z+5)$ teilbar. Die Division ergibt $(z^4-8z^3+24z^2-32z+15):(z^2-4z+5)=z^2-4z+3$. Daraus erhält man die zwei weiteren Lösungen $\underline{\underline{Z_2=3}}$ und $\underline{\underline{Z_4=1}}$.

Aufgabe 3b,c $w_1=0$; $w_2=-1$; $w_3=-1-i$; $w_4=-i$.



Aufgabe 3d Eine Drehstreckung ist durch ein lineares Polynom gegeben: $w = f(z) = az + b$.
Verlangt ist $w_1 = az_1 + b$ und $w_2 = az_2 + b$. Wir erhalten das System

$\left.\begin{aligned}(2-i)a+b&=0\\ 3a+b&=-1\end{aligned}\right\}$ mit den Lösungen $a = -\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i$; $b = \frac{1}{2}-\frac{3}{2}i$.

Die gesuchte Drehstreckung lautet $\underline{\underline{w = f(z) = \left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\cdot z + \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right)}}$

mit dem Drehwinkel $\alpha = \arg(a) = \arg(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i) = \underline{\underline{135°}}$

und dem Streckungsfaktor $\lambda = |a| = \left|-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right| = \underline{\underline{\frac{\sqrt{2}}{2}}}$.

Das Drehstreckzentrum z_o ist der Fixpunkt der Abbildung, also die Lösung der Gleichung $f(z_o) = z_o$: $\left(-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}i\right)\cdot z_o + \left(\frac{1}{2}-\frac{3}{2}i\right) = z_o \Rightarrow z_o = \underline{\underline{0.6-0.8i}}$.

Aufgabe 4a a11) $P = \dfrac{\binom{9}{1}\binom{11}{2}}{\binom{20}{3}} = \dfrac{9\cdot 55}{1140} = \dfrac{33}{76} = \underline{\underline{0.434}}$

a12) nicht beide Kugeln rot $\quad P = 1 - \frac{7}{20}\cdot\frac{6}{19} = \frac{338}{380} = \underline{\underline{0.889}}$

a2) Bedingte Wahrscheinlichkeit. $P(A\,|\,B)$ mit den Ereignissen A = { erste rot } und B= { zweite schwarz} = { schwarz–schwarz oder nichtschwarz–schwarz }.

$$P(A\,|\,B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{7}{20}\cdot\frac{4}{19}}{\frac{4}{20}\cdot\frac{3}{19}+\frac{16}{20}\cdot\frac{4}{19}} = \frac{7\cdot 4}{4\cdot 3+16\cdot 4} = \frac{7}{19} = \underline{\underline{0.368}}.$$

Aufgabe 4b Die Wahrscheinlichkeit, dass ein gebuchter Fluggast zum Flug erscheint, ist $p = 90\%$. Binomische Verteilung mit $p = 0.9$, $q = 0.1$, n = Anzahl Buchungen = 328, x = Anzahl Fluggäste, die zum Flug erscheinen. Die Fluggesellschaft muss Fluggäste abweisen, wenn $x > 300$. Man fragt nach der Wahrscheinlichkeit $P_{328}(x > 300)$. Wir approximieren die Binomialverteilung durch die Normalverteilung mit $\mu = n\cdot p = 328\cdot 0.9 = 295.2$ und $\sigma = \sqrt{npq} = \sqrt{29.52} = 5.433$, was mit der Faustregel $npq > 9$ ein befriedigend genaues Resultat erwarten lässt. Mit $u = \frac{x-\mu+0.5}{\sigma} = \frac{300-295.2+0.5}{5.433} = 0.974$ lesen wir aus der Tabelle die Wahrscheinlichkeit $\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{u} e^{-z^2/2}dz = 0.835$, dass höchstens 300 Passagiere erscheinen. Die Wahrscheinlichkeit, Passagiere abweisen zu müssen, beträgt somit $P = 1-0.835 = 0.165 = \underline{\underline{17\%}}$.

Aufgabe 5a Verankerung: Für $n = 1$ gilt richtig: $1\cdot 2 = \frac{1}{3}\cdot 1\cdot(1+1)\cdot(1+2)$ (nachrechnen).

Induktion: $\underbrace{1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n\cdot(n+1)}_{\substack{=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)\\ \text{falls Formel für n richtig}}} + \underbrace{(n+1)\cdot(n+2)}_{\text{nächster Summand}} = \underbrace{\ldots\ldots}_{\substack{\text{rechnen}\\ \text{Sie}}} = \underbrace{\tfrac{1}{3}(n+1)(n+2)(n+3)}_{\substack{\text{Behauptete Formel}\\ \text{für (n+1)}}}$.

Aufgabe 5b $f(-x) = \dfrac{\sqrt{e^{-x}}}{e^{-x}+1} = \dfrac{e^x\cdot\sqrt{e^{-x}}}{e^x\cdot(e^{-x}+1)} = \dfrac{\sqrt{e^{2x}e^{-x}}}{e^x e^{-x}+e^x} = \dfrac{\sqrt{e^x}}{1+e^x} = f(x)$.

Aufgabe 5c $A(\varphi) = 2\cdot\sin\varphi\cdot\left(\cos\varphi - \frac{\sin\varphi}{\tan\frac{\alpha}{2}}\right) =$

$= 2\sin\varphi\cos\varphi - \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}\cdot 2\sin^2\varphi = \sin 2\varphi + \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}\cdot\cos 2\varphi - \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$

$A'(\varphi) = \left(\cos 2\varphi - \frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}\cdot\sin 2\varphi\right)\cdot 2 \underbrace{=0}_{\text{für Extr.}}$

$\Rightarrow \tan 2\varphi = \tan\frac{\alpha}{2} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = \frac{\alpha}{4}}}$