

Mathematik

Erweitertes Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)

bzw. Typus C (Eidg. Maturitätsprüfung)

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung, Tabelle der kumulierten Normalverteilung (siehe Beilage), Graphik-Taschenrechner (=TR) ohne Computer-Algebra-System.
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall klar ersichtlich sein.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für Note 6 müssen nicht alle Aufgaben gelöst werden.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite.

1. Gegeben ist die Funktionenschar $y = a \cdot e^{-a(x+a)^2}$, wobei a ein positiver Parameter ist.
 - a) Zeichnen Sie die Schar für die Parameterwerte $a \in \{0.5, 1, 1.5, 2\}$, für $(-5) < x < 2$ und $(-1) < y < 2.5$ (Einheiten: Je vier Häuschen).
 - b) Zeigen Sie, dass jede Scharkeurve genau einen Punkt mit horizontaler Tangente hat. Wie heisst die Gleichung der Geraden, auf der alle diese Punkte liegen?
 - c) Sie dürfen als bekannt voraussetzen, dass jede der Scharkurven genau zwei Wendepunkte hat. Berechnen Sie für $a = 2$ die x -Koordinaten dieser Wendepunkte.
 - d) Wie heisst die Gleichung der Tangente einer allgemeinen Scharkeurve, deren Berührungspunkt auf der y -Achse liegt?
 - e) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Flächenstücks, das durch eine allgemeine Scharkeurve und die x -Achse begrenzt wird. Das Integral $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-p^2/2} dp = \sqrt{2\pi}$ gilt dabei als bekannt. Verwenden Sie die Substitution $p = (x+a)\sqrt{2a}$.
2. Normalform der Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist $z = x + iy$ (mit x, y reell, $i^2 = (-1)$); $z = r e^{i\varphi} = r \operatorname{cis}(\varphi)$ (mit nichtnegativem, reellen r) ist ihre Polarform.
 - a) Konstruieren Sie in der Gauss'schen Zahlenebene (Einheiten: 5 Häuschen) mit Zirkel und Lineal die Lösungen der Gleichung $z^3 = 2 + 2i$, und geben Sie diese in Polarform exakt an.
 - b) Die Zahlen $z_A = 33 + 32i$, $z_B = 41 + 38i$, z_C und z_D bilden in der Gauss'schen Zahlenebene ein positiv orientiertes Quadrat $z_A z_B z_C z_D$. Berechnen Sie z_C und z_D .
 - c) Die Abbildung g mit der Gleichung $w = g(z) = a z + b$ (mit $a, b \in \mathbb{C}$) bildet die Zahl $z_1 = 1 + 2i$ auf die Zahl $w_1 = 5 + 4i$ und die Zahl $z_2 = 5 - 3i$ auf die Zahl $w_2 = 4 - 5i$ ab. Bestimmen Sie den einzigen Fixpunkt dieser Abbildung in Normalform.
 - d) Berechnen Sie die geometrische Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}i\right)^k$ in Normalform.
 - e) Es gibt Zahlen z , für die $z \cdot \bar{z} = z + \bar{z}$ ist (\bar{z} ist die zu z konjugiert komplexe Zahl). Welche davon hat den grössten Imaginärteil?

3. Gegeben sind die Ebenen $E: x - 2y - 2z = 0$ und $F: x + y - z = 0$ sowie die Gleichung einer Kugel $k: (x - 11)^2 + (y - 13)^2 + (z - 12)^2 = r^2$ mit Mittelpunkt M und Radius r . Die Kugel k berührt die Ebene E im Punkt B .
- Wie gross ist der Radius r der Kugel k ?
 - Berechnen Sie die Koordinaten des Berührungspunktes B .
 - Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E und F an.
 - Finden Sie eine Gleichung derjenigen Kugeltangente g , die parallel zur Ebene F verläuft und die Kugel k in $C(-1/9/9)$ berührt.
 - Wie gross ist der Abstand des Mittelpunkts M der Kugel k von der Geraden h , die durch den Ursprung und den Punkt $P(5/8/8)$ geht?
-

4. Ein roter und ein grüner Spielwürfel werden miteinander geworfen.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Summe der geworfenen Augenzahlen eine Primzahl ist?
 - Wie gross ist der Erwartungswert für das Produkt der geworfenen Augenzahlen?
 - Wie oft müssen die beiden Würfel im Mittel miteinander geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95% mindestens ein Mal eine Augenzahl 6 erscheint?
 - Wir nehmen an, dass die beiden Würfel 1260 Mal miteinander geworfen werden. Berechnen Sie mit Hilfe einer passenden Normalverteilung die Wahrscheinlichkeit, dass die Anzahl der dabei auftretenden Doppelsechserwürfe zwischen 32 und 40 (je inklusive!) liegt. Die (exakte) Binomialverteilung soll hier nicht verwendet werden.
 - Bei 1260 Würfeln der beiden Würfel wurde nur 26 Mal ein Doppelsechserwurf gezählt. Entscheiden Sie auf einem 95%-Niveau (einseitig), ob mindestens ein Würfel zu wenig oft sechs Augen zeigt.
-

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

- Zeigen Sie, dass das Dreieck mit den Seiten $a = 5$ cm, $b = 7$ cm und $c = 8$ cm einen exakten 60° -Winkel aufweist.

- Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow \pi/3} \frac{1 - 2 \cos(x)}{3x - \pi}$ exakt und kommentieren Sie dabei kurz jeden Schritt.

- Lösen Sie das Gleichungssystem
$$\left| \begin{array}{l} \log_{10}(5x) + \log_{10}(2y) = 3 \\ \log_{10}(8x - 25y) = 2 \\ \log_{10}(x) \in \mathbb{R} \end{array} \right| \text{ auf.}$$

- Das Zahlentripel $\{n, n+2, n+4\}$ heisst Primzahltripel, wenn jede dieser drei Zahlen prim ist. Zeigen Sie, dass es nur ein einziges Primzahltripel gibt.

- Stellen Sie vier Gleichungen eines Gleichungssystems auf, mit welchem die Matrixelemente a, b, c und d der zur Matrix $A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix}$ inversen Matrix $A^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ berechnet werden können, und berechnen Sie damit A^{-1} .

(Ende)

Kumulierte Normalverteilung

In der Tabelle sind auf 5 Stellen gerundete Werte von $\int_{-\infty}^u \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz$ angegeben.

u	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	.50000	.50399	.50798	.51197	.51595	.51994	.52392	.52790	.53188	.53586
0.1	.53983	.54380	.54776	.55172	.55567	.55962	.56356	.56749	.57142	.57535
0.2	.57926	.58317	.58706	.59095	.59483	.59871	.60257	.60642	.61026	.61409
0.3	.61791	.62172	.62552	.62930	.63307	.63683	.64058	.64431	.64803	.65173
0.4	.65542	.65910	.66276	.66640	.67003	.67364	.67724	.68082	.68439	.68793
0.5	.69146	.69497	.69847	.70194	.70540	.70884	.71226	.71566	.71904	.72240
0.6	.72575	.72907	.73237	.73565	.73891	.74215	.74537	.74857	.75175	.75490
0.7	.75804	.76115	.76424	.76730	.77035	.77337	.77637	.77935	.78230	.78524
0.8	.78814	.79103	.79389	.79673	.79955	.80234	.80511	.80785	.81057	.81327
0.9	.81594	.81859	.82121	.82381	.82639	.82894	.83147	.83398	.83646	.83891
1.0	.84134	.84375	.84614	.84849	.85083	.85314	.85543	.85769	.85993	.86214
1.1	.86433	.86650	.86864	.87076	.87286	.87493	.87698	.87900	.88100	.88298
1.2	.88493	.88686	.88877	.89065	.89251	.89435	.89617	.89796	.89973	.90147
1.3	.90320	.90490	.90658	.90824	.90988	.91149	.91309	.91466	.91621	.91774
1.4	.91924	.92073	.92220	.92364	.92507	.92647	.92785	.92922	.93056	.93189
1.5	.93319	.93448	.93574	.93699	.93822	.93943	.94062	.94179	.94295	.94408
1.6	.94520	.94630	.94738	.94845	.94950	.95053	.95154	.95254	.95352	.95449
1.7	.95543	.95637	.95728	.95818	.95907	.95994	.96080	.96164	.96246	.96327
1.8	.96407	.96485	.96562	.96638	.96712	.96784	.96856	.96926	.96995	.97062
1.9	.97128	.97193	.97257	.97320	.97381	.97441	.97500	.97558	.97615	.97670
2.0	.97725	.97778	.97831	.97882	.97932	.97982	.98030	.98077	.98124	.98169
2.1	.98214	.98257	.98300	.98341	.98382	.98422	.98461	.98500	.98537	.98574
2.2	.98610	.98645	.98679	.98713	.98745	.98778	.98809	.98840	.98870	.98899
2.3	.98928	.98956	.98983	.99010	.99036	.99061	.99086	.99111	.99134	.99158
2.4	.99180	.99202	.99224	.99245	.99266	.99286	.99305	.99324	.99343	.99361
2.5	.99379	.99396	.99413	.99430	.99446	.99461	.99477	.99492	.99506	.99520
2.6	.99534	.99547	.99560	.99573	.99585	.99598	.99609	.99621	.99632	.99643
2.7	.99653	.99664	.99674	.99683	.99693	.99702	.99711	.99720	.99728	.99736
2.8	.99744	.99752	.99760	.99767	.99774	.99781	.99788	.99795	.99801	.99807
2.9	.99813	.99819	.99825	.99831	.99836	.99841	.99846	.99851	.99856	.99861
3.0	.99865	.99869	.99874	.99878	.99882	.99886	.99889	.99893	.99896	.99900
3.1	.99903	.99906	.99910	.99913	.99916	.99918	.99921	.99924	.99926	.99929
3.2	.99931	.99934	.99936	.99938	.99940	.99942	.99944	.99946	.99948	.99950
3.3	.99952	.99953	.99955	.99957	.99958	.99960	.99961	.99962	.99964	.99965
3.4	.99966	.99968	.99969	.99970	.99971	.99972	.99973	.99974	.99975	.99976
3.5	.99977	.99978	.99978	.99979	.99980	.99981	.99981	.99982	.99983	.99983
3.6	.99984	.99985	.99985	.99986	.99986	.99987	.99987	.99988	.99988	.99989
3.7	.99989	.99990	.99990	.99990	.99991	.99991	.99992	.99992	.99992	.99992
3.8	.99993	.99993	.99993	.99994	.99994	.99994	.99994	.99995	.99995	.99995
3.9	.99995	.99995	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99996	.99997	.99997