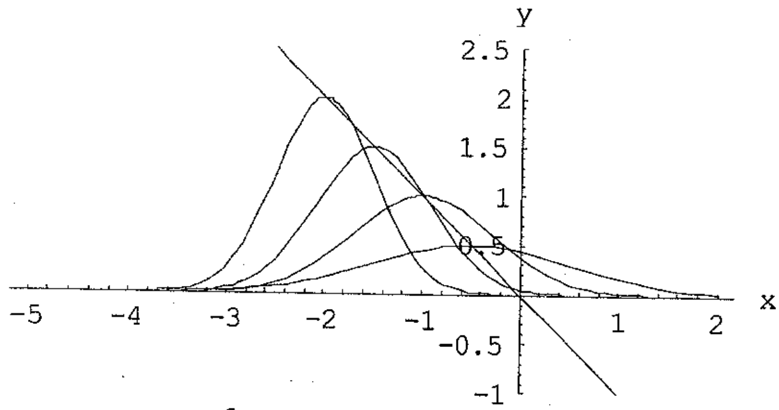
Lösungen Schweizerische / Eidgenössische Maturitätsprüfung
Herbst 2005 Basel
Erweitertes Niveau / Typus C

Es werden nur ganze Punkte vergeben – maximal 2 Punkte für jede Teilaufgabe.

1. a)



1. b) $f_a'(x) = -2\,a^2\,e^{-a\,(a+x)^2}\,(a+x) = 0$ ergibt die einzige Lösung $x = -a$.
$f_a''(x)$ wird hier nicht verlangt; alle Punkte H mit horizontaler Tangente haben die y–Koordinate $f_a(-a) = a$ und liegen darum auf der Geraden mit der Gleichung $y = -x$.

1. c) $f_a''(x) = a\left(-2\,a\,e^{-a\,(a+x)^2} + 4\,a^2\,e^{-a\,(a+x)^2}\,(a+x)^2\right) = 0$ ergibt für a=2 die Gl. $(-8 + 32\,(2 + x)^2) = 0$ mit Lösungen $x_1 = -5/2$ und $x_2 = -3/2$.

1. d) Tangentengleichung: $y = mx + q$, mit $m = f_a'(x{=}0) = -2a^3e^{-a^3}$ und $q = f_a(x{=}0) = ae^{-a^3}$.

1. e) Mit Transformation der Differentiale: $dp = dx\,\sqrt{2a}$ ergibt sich: $A = \sqrt{\pi a}$.

2. a) $z_0 = \sqrt{2}\ \text{cis}(15°)$, $z_1 = \sqrt{2}\ \text{cis}(135°)$ und $z_2 = \sqrt{2}\ \text{cis}(255°)$, oder als $\sqrt{2}\,e^{i\,\pi/12}$, $\sqrt{2}\,e^{i\,3\pi/4}$ und $\sqrt{2}\,e^{i\,17\pi/12}$.
In der Skizze müssen die Achsen mit Re(z), Im(z) und je zwei Werten angeschrieben sein.

2. b) Am einfachsten mit einer Skizze: $z_C = 35 + 46\,i$ und $z_D = 27 + 40\,i$.

2. c) $a(1+2i)=5+4i-b$ und $a(5-3i)=4-5i-b$ auflösen: $a = 1-i$ und $b = 2 + 3i$; $z = f(z) = 3-2i$.

2. d) $\dfrac{1}{1-(\frac{1}{2}-\frac{1}{4}i)} = \frac{8}{5}-\frac{4}{5}i$. Komplexe geometrische Reihe.

2. e) $(a+ib)(a-ib)=(a+ib) + (a-ib)$, also $a^2 + b^2 = 2a$. Das ergibt einen Kreis in der komplexen Ebene mit Mittelpunkt 1 und Radius 1. Maximaler Imaginärteil bei $z = 1 + i$.

3. a) Mittelpunkt der Kugel: M(11/13/12); HNF von E: $(x-2y-2z)/3 = 0$; $\Rightarrow r = 13$.

3. b) Normale zu E durch M mit E schneiden: $(11+t)-2(13-2t)-2(12-2t)=0$; $t = 13/3$;
$B(\frac{46}{3}/\frac{13}{3}/\frac{10}{3})$.

3. c) $s: \vec{r} = t\begin{pmatrix}1\\-2\\-2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} = t\begin{pmatrix}4\\-1\\3\end{pmatrix}$.

3. d) Tangente g steht senkrecht zum Normalenvektor der Ebene F und senkrecht zu $\overline{CM}$; im unbekannten Richtungsvektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ kann z.B. $x = 1$ gewählt werden: $g: \vec{r} = \begin{pmatrix} -1 \\ 9 \\ 9 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -7 \\ 15 \\ 8 \end{pmatrix}$.

3. e) Drei mögliche Versionen:
V_1: Abstandsquadrat $d^2 = 153\,t^2 - 510\,t + 434$ muss minimal werden: $t = 5/3$; $d = 3$.

V_2: Mit Vektorprodukt: $\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right\| \cdot h = \left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} \right\|$; damit wird $h = 3$.

V_3: Lotfusspunkt H: $t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \cdot \left(\begin{pmatrix} 11 \\ 13 \\ 12 \end{pmatrix} - t \begin{pmatrix} 5 \\ 8 \\ 8 \end{pmatrix} \right) = 0$; daraus $t = 5/3$; $H\left(\frac{25}{3} / \frac{40}{3} / \frac{40}{3}\right)$, mit $\overline{HM} = 3$.

4. a) Alle 36 Fälle ansehen: $W = 15/36$.

4. b) $\sum_{i=1}^{6} \sum_{j=1}^{6} \frac{1}{36} \cdot i \cdot j = 49/4 = 12.25$.

4. c) "Nie 6 in n Doppelwürfen": $p = (25/36)^n$; $95\% = 1 - p$ ergibt $n = 8.21$, gerundet also $n=9$.
4. d) $\mu = 1260/36 = 35$; $\sigma = 35/6$. Mit Integral von 31.5 bis 40.5 (Stetigkeitskorr.!): 55.29%.
Oder mit Tabelle: $z_1 = -0.6$, $z_2 = 0.943$ (und gleichem Resultat);
Oder mit Binomialverteilung: 54.8 %.
4. e) Mit Binomialverteilung: W. für 26 oder weniger Doppelsechser ist 6.77%.
Berechnung mit Normalverteilung: 7.25%; die Nullhypothese – Zufall! – kann nicht verworfen werden.

5. a) $7^2 = 5^2 + 8^2 - 2 \cdot 5 \cdot 8 \cos(\beta)$, also $\cos(\beta) = ½$; $\beta = 60°$.

5. b) Regel von Hôpital anwenden: $\frac{2\sin(\pi/3)}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3}$.

5. c) $x = 25$ und $y = 4$. Die "Lösung" $x = -25/2$ und $y = -8$ geht nicht, da $\log_{10}(-25/2) \notin R$.
5. d) Das erste Tripel ist $\{3, 5, 7\}$. Ist $n > 3$ und $n \in V(3)$, ergibt sich kein Primzahltripel. Also muss entweder $n \bmod 3 = 1$ oder $n \bmod 3 = 2$ sein. Im ersten Fall ist dann aber $n + 2 \in V(3)$, im zweiten Fall ist $n + 4 \in V(3)$: Das angegebene Tripel ist das einzige.
5. e) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ führt auf das Gleichungssystem $\begin{vmatrix} a + 4c = 1 & b + 4d = 0 \\ 5a + 2c = 0 & 5b + 2d = 1 \end{vmatrix}$ mit den Lösungen $a = -1/9$, $b = 2/9$, $c = 5/18$ und $d = -1/18$.