

Welches Taschenrechnermodell verwenden Sie?

(Diese Angabe ist freiwillig und wird bei der Bewertung der Prüfung nicht berücksichtigt!)

Mathematik**Erweitertes Niveau**

Dauer: 4 Stunden

Jede Aufgabe wird mit je maximal 12 Punkten bewertet.

Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Von einer Ebene E kennt man den Punkt $P(6 | -2 | -2)$ und die Schnittgerade $y - 2z + 4 = 0$ mit der y - z -Ebene.

Zusätzlich kennt man die Gerade $g: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, welche E schneidet.

- Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E .
- Unter welchem Winkel schneidet eine zu E senkrecht stehende Gerade die x - y -Ebene?
- Die 3 Punkte, in denen die Koordinatenachsen E durchstossen, bilden das Dreieck ABC . Wie muss der Punkt D auf g gewählt werden, damit die Pyramide $ABCD$ den Volumeninhalt $V = 8$ erhält?
- Licht fällt überall „von weit oben“ senkrecht zu E ein. Berechnen Sie den Schattenpunkt von D auf der Ebene E und entscheiden Sie, ob er sich ausserhalb des Dreiecks ABC befindet oder nicht.

2. Lösen Sie die zwei voneinander unabhängigen Aufgaben.

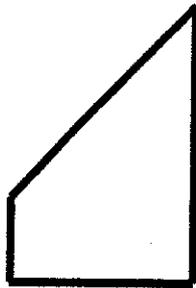
2.1. Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = -1 + i$.

- Für welche Zahlen z gilt die Gleichung $z^2 \cdot z^3 = z_1^2$? Resultate in Polarform!
- Für welche Zahlen z gilt: $(z + 2i) \cdot z_1 = \bar{z} \cdot z_2$?

2.2. $P(t | ?)$, $t \geq 0$, sei Kurvenpunkt der Parabel $K: y^2 = 2px$.

- Die Tangente in P an K schneide die x -Achse in Q . Zeigen Sie rechnerisch, dass die Strecke PQ durch die y -Achse halbiert wird!
- Der Kreis k habe seinen Mittelpunkt auf der x -Achse und gehe durch P und auch durch den Scheitelpunkt S der Parabel. Berechnen Sie den Radius r des Kreises k in Abhängigkeit von t und den Grenzwert von r für $t \rightarrow 0$.

3. Die Polizei führt auf der Autobahn an einer bestimmten Stelle Radarkontrollen durch. Erfahrungswerte über eine längere Zeit haben ergeben, dass 10% der Männer und 5% der Frauen an dieser Stelle zu schnell fahren.
- Wie viele Frauen müssen kontrolliert werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von wenigstens 90% mindestens eine zu schnell fährt?
 - Am Dienstag werden 50 Personen kontrolliert, 30 Männer und 20 Frauen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Person, welche zuerst kontrolliert wird, zu schnell fährt?
 - Am Donnerstag fahren 78 Personen zu schnell, 50 Männer und 28 Frauen. 10 dieser Personen erhalten die Busse schon am nächsten Tag.
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es alles Frauen?
 - Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es gleich viele Männer wie Frauen?
 - Die Polizei vermutet, dass sich der Prozentsatz der zu schnell fahrenden Männer erhöht hat. Um diese Vermutung zu überprüfen, misst sie zusätzlich die Geschwindigkeit von 80 Männern. Wieviele davon müssen zu schnell fahren, damit die Vermutung bestätigt wird? (Einseitiger Test, Irrtumswahrscheinlichkeit 2.25%)
4. Der Architekt Mario Botta verwendet in seiner Architektur oft einfache geometrische Grundformen. Die gemauerte Aussenwand der Kapelle in Mogno (Tessin) ist drehzylinderförmig, die Ebene des Glasdaches schneidet diesen Zylinder unter einem Winkel von 45° .



Vertikalschnitt durch die Achse

- Welchen Flächeninhalt hat das Glasdach in Abhängigkeit vom Zylinderradius r ?
- Der Volumeninhalt der Kapelle betrage 1600 m^3 . Bestimmen Sie den Radius des Zylinders so, dass die für den Wärmeverlust massgebende Aussenfläche (Wand und Dach) möglichst klein wird?

5. Gegeben sei die Kurve K: $y = \frac{\ln^2 x}{x^s}$ für $s > 1$, s konstant.

a) Untersuchen Sie K hinsichtlich Definitionsbereich und Verhalten an dessen Rändern.

b) Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte mit horizontaler Tangente (in Abhängigkeit von s).

c) Deuten Sie $A(s) = \int_1^{\infty} \frac{\ln^2 x}{x^s} dx$ als Inhalt eines Flächenstücks (qualitative Skizze!) und berechnen Sie $A(s)$ exakt. (Tipp: Partielle Integration!)