# Herbst 2006

1. Von einer Ebene E kennt man den Punkt P(6/-2/-2) und die Schnittgerade y-2z+4=0 mit der y-z-Ebene.

   Zusätzlich kennt man die Gerade g : $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$, welche E schneidet.

   a) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene E.
   Die Gerade ergibt sich aus der gesuchten Ebenengleichung E: ax+by+cz+d=0 indem x=0 gesetzt wird. Also sind b=1, c=-2 und d=4. a erhält man indem man P in E einsetzt :

$$\begin{aligned} E : ax + y - 2z + 4 &= 0 \\ 6a - 2 + 4 + 4 &= 0 \\ a &= -1 \end{aligned}$$

   $E : -x + y - 2z + 4 = 0$

   b) Unter welchem Winkel schneidet eine zu E senkrechte Gerade die x-y-Ebene ?
   Normalenvektor $\overrightarrow{n}$ der Ebene :

$$\overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

   Normalenvektor $\overrightarrow{m}$ der Ebene x-y :

$$\overrightarrow{m} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

   Winkel zwischen $\overrightarrow{m}$ und $\overrightarrow{v}$ :

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{m} \cdot \overrightarrow{n}}{m \cdot n} \\ \cos\alpha &= \frac{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}}{1 \cdot \sqrt{1+1+4}} \\ \cos\alpha &= \frac{-2}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{3}\sqrt{6} \\ \alpha &= 144,73^\circ \text{ bzw. } 35,27^\circ \end{aligned}$$

   Dies ist der Winkel zwischen den Vektoren der Ebenen, somit ist derWinkel zu einer senkrechten Geraden 54,74°.

   c) Die 3. Punkte, in denen die Koordinatenachsen E durchstossen, bilden das Dreieck ABC. Wie muss der Punkt D auf g gewählt werden, damit die Pyramide ABCD den Volumeninhalt V=8 erhält ?
   Um A,B und C zu erhalten werden paarweise zwei Koordinaten gleich Null gesetzt :

$$\begin{aligned} -x + y - 2z + 4 &= 0 \\ x = y &= 0 \\ z &= 2 \\ &C(0/0/2) \\ x = z &= 0 \\ y &= -4 \\ &B(0/-4/0) \\ y = z &= 0 \\ x &= 4 \\ &A(4/0/0) \end{aligned}$$

Die Fläche des Dreiecks ABC ergibt sich als der halbe Betrag des Vektorprodukt von z.B. $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AC}$ :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{h} &= \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC} \\
\overrightarrow{h} &= \begin{pmatrix} -4 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{h} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -8 \\ 16 \end{pmatrix} \\
h &= 8\sqrt{6}
\end{aligned}$$

$A_{ABC} = \frac{1}{2}h = 4\sqrt{6}$. Die Höhe der Pyramide ergibt sich aus ihrem Volumen :

$$\begin{aligned}
V &= \frac{1}{3} A \cdot H \\
H &= \frac{3V}{A} = \frac{24}{4\sqrt{6}} = \sqrt{6}
\end{aligned}$$

Wir suchen also einen Punkt D auf g, dessen Abstand von $E_{ABC}$ gleich $\pm\sqrt{6}$ ist. Bildung der Hesseform von E und einsetzen von g :

$$\begin{aligned}
x - y + 2z + 4 &= 0 \\
\frac{x - y + 2z + 4}{\sqrt{6}} &= 0 \\
\text{g} : \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\text{in rechte Seite muss} &\pm \sqrt{6} \text{ ergeben :} \\
\frac{(-2+2t) - (2-t) + 2(-2t) + 4}{\sqrt{6}} &= \pm\sqrt{6} \\
t_1 &= -14,\ \overrightarrow{r_{D_1}} = \begin{pmatrix} -30 \\ 16 \\ 28 \end{pmatrix} \\
t_2 &= -2,\ \overrightarrow{r_{D_2}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

d) Licht fällt überall "von weit oben" senkrecht zu E ein. Berechnen Sie den Schattenpunkt von D auf der Ebene E und entscheiden Sie, ob er sich ausserhalb des Dreiecks ABC befindet oder nicht.
"Von weit oben" bedeutet senkrecht zu E. Der Schattenpunkt D' ergibt sich durch Schnitt einer Geraden durch D mit dem Normalenvektor von E als Richtungsvektor :

$$\overrightarrow{r_{D_1'}} = \begin{pmatrix} -30 \\ 16 \\ 28 \end{pmatrix}$$

Sowohl x-, wie y-Koordinate zeigen, dass $D_1'$ ausserhalb von ABC liegt. Ebenso $D_2'$ :

$$\overrightarrow{r_{D_2'}} = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix}$$

2. Lösen Sie die zwei voneinander unabhängigen Aufgaben :

2.1Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 2 + 3i$ und $z_2 = -1 + i$.

a)Für welche Zahlen z gilt die Gleichung $z_2^2 \cdot z^3 = z_1^2$ ? Resultat in Polarform!

$$\begin{aligned}
z_1 &= 2 + 3i = r_1 e^{i\alpha_1} \\
\text{mit} &: r_1 = \sqrt{2^2 + 3^2} = \sqrt{13} \\
\text{und } \tan\alpha_1 &= \frac{3}{2} \text{ also } \alpha_1 = 56,310^\circ \\
z_2 &= -1 + i = r_2 e^{i\alpha_2} \\
\text{mit} &: r_2 = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2} \\
\text{und } \tan\alpha_1 &= -1 \text{ also } \alpha_1 = 135^\circ
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
z_2^2 \cdot z^3 &= z_1^2 \\
z^3 &= \frac{z_1^2}{z_2^2} \\
z^3 &= \frac{r_1^2 e^{2i\alpha_1}}{r_2^2 e^{2i\alpha_2}} \\
z^3 &= \frac{13}{2} e^{2i(\alpha_1 - \alpha_2) + n \cdot 2\pi} \text{ mit } n \in \mathbb{Z} \\
z_{1,2,3} &= \sqrt[3]{\frac{13}{2}} e^{\frac{2i(\alpha_1 - \alpha_2) + n \cdot 2\pi}{3}} \text{für } n = 1, 2, 3
\end{aligned}$$

b)Für welche Zahlen z gilt : $(z + 2i) \cdot z_1 = \overline{z} \cdot z_2$ ?

$$\begin{aligned}
(z + 2i) \cdot (2 + 3i) &= \overline{z} \cdot (-1 + i) \\
z &= a + ib \\
(a + ib + 2i) \cdot (2 + 3i) &= (a - ib) \cdot (-1 + i) \\
(2 + 3i)\, a - (3 - 2i)\, b - (6 - 4i) &= (1 + i)\, b - (1 - i)\, a \\
(3 + 2i)\, a - (4 - i)\, b - (6 - 4i) &= 0 \\
3a - 4b - 6 + i\,(2a + b + 4) &= 0 \\
I.3a - 4b - 6 &= 0 \\
II.2a + b + 4 &= 0 \\
a &= -\frac{10}{11}, b = -\frac{24}{11} \\
z &= -\frac{2}{11}\,(5 + 12i)
\end{aligned}$$

2.2P(t/?) , $t \geq 0$, sein ein Kurvenpunkt der Parabel $K : y^2 = 2px$.

a)Die Tangente in P an K schneide die x-Achse in Q. Zeigen Sie rechnerisch, dass die Strecke PQ durch die y-Achse halbiert wird!

Da die Parabel zur x-Achse symmetrisch ist, reicht es einen Punkt mit positiver y-Koordinate zu betrachten $P\left(t\,\middle|\, +\sqrt{2pt}\right)$.

Die Tangente erhält man durch polarisieren von K :

$$\begin{aligned}
y^2 &= 2px \\
y \cdot y &= px + px \\
\text{P einsetzen} &: \\
y \cdot \sqrt{2pt} &= pt + px \\
t &: y = \sqrt{\frac{p}{2t}}x + \sqrt{\frac{pt}{2}} \\
\text{Nullstelle von t} &: \\
\sqrt{\frac{p}{2t}}x + \sqrt{\frac{pt}{2}} &= 0 \\
x &= -t
\end{aligned}$$

Wir haben also $P\left(t\left|+\sqrt{2pt}\right.\right)$ und $Q\left(-t\left|0\right.\right)$.
In x-Richtung liegen sie symmetrisch zur y-Achse. In y-Richtung unterscheiden sie sich um $\sqrt{2pt}$. Der y-Achsenabschnitt von t ist $\sqrt{\frac{pt}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2pt}$, also ebenfalls gerade die Hälfte. Somit halbiert die y-Achse auch PQ.

b)Der Kreis k habe seinen Mittelpunkt auf der x-Achse und gehe durch P und auch durch den Scheitel S der Parabel. Berechnen Sie den Radius r des Kreises in Abhängigkeit von t und den Grenzwert r für $t \to 0$.
Scheitel der Parabel ist bei (0/0), Mittelpunkt $x_M = r$. Also muss gelten :

$$\begin{aligned}
r^2 &= \left(t - x_M\right)^2 + y_P^2 \\
r^2 &= \left(t - r\right)^2 + 2pt \\
r &= \frac{2pt + t^2}{2t} = p + \frac{t}{2} \\
\text{für } t &\neq 0 : r = p + \frac{1}{2}t \\
r &= \lim_{t\to 0} \frac{2pt + t^2}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{t\left(2p + t\right)}{2t} = \lim_{t\to 0} \frac{2p + t}{2} = p
\end{aligned}$$

3. Die Polizei führt auf der Autobahn an einer bestimmten Stelle Radarkontrollen durch. Erfahrungwerte über eine längere Zeit haber ergeben, dass 10% der Männer und 5% der Frauen an dieser Stelle zu schnell fahren.
   a) Wie viele Frauen müssen kontrolliert werden, damit mit einer WS von wenigstens 90% mindestens eine zu schnell fährt ?

$$\begin{aligned} WS(mindestens\ eine\ zu\ schnell) &\geq 90\% \\ 1 - WS(keine\ zu\ schnell) &\geq 0,9 \\ WS(keine\ zu\ schnell) &\leq 0,1 \\ 0,95^n &\leq 0,1 \\ n &\geq \frac{\log 0.1}{\log 0.95} = 44,891 \\ n &\geq 45 \end{aligned}$$

   b) Am Dienstag werden 50 Personen kontrolliert, 30 Männer und 20 Frauen. Wie gross ist die WS, dass die Person, die zuerst kontrolliert wird, zu schnell fährt ?

$$\begin{aligned} \text{WS(1. Person zu schnell)} &= \text{WS(Mann)WS(zu schnell)+WS(Frau)WS(zu schnell)} \\ \text{WS(1. Person zu schnell)} &= \frac{3}{5} \cdot 0.1 + \frac{2}{5} \cdot 0.05 = 8\% \end{aligned}$$

   c) Am Donnerstag fahren 78 Personen zu schnell, 50 Männer und 28 Frauen. 10 dieser Personen erhalten die Busse schon am nächsten Tag.
   $c_1$)Mit welcher WS sind es alles Frauen ?

$$WS = \frac{\binom{28}{10}}{\binom{78}{10}} = 1.043 \times 10^{-5}$$

   $c_2$)Mit welcher WS sind es gleich viele Männer wie Frauen ?

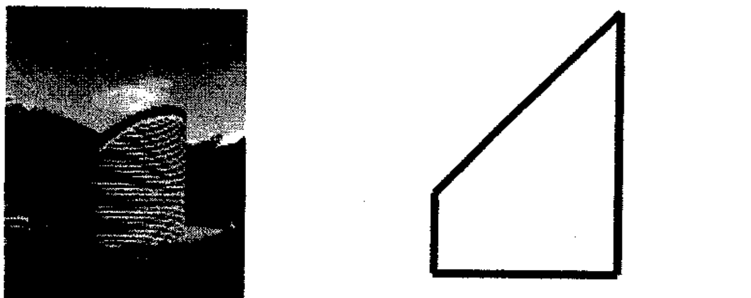
$$WS = \frac{\binom{28}{5}\binom{50}{5}}{\binom{78}{10}} = 16.55\%$$

   d) Die Polizei vermutet, dass sich der Prozentsatz der zu schnell fahrenden Männer erhöht hat. Um diese Vermutung zu überprüfen, misst sie zusätzlich die Geschwindigkeit von 80 Männern. Wieviele davon müssen zu schnell fahren, damit die Vermutung bestätigt wird ? (einseitiger Test, Irrtumswahrscheinlichkeit 2,25%).
   Nullhypothese : WS hat sich nicht geändert, d.h. ist immer noch 10%. Ein Ergebnis von 0 bis z zu schnell fahrenden ist mit 97,75% mit der Nullhypothese vereinbar :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{z} \binom{80}{k} 0.1^k 0.9^{80-k} &\leq 0.9775 \\ \sum_{k=0}^{13} \binom{80}{k} 0.1^k 0.9^{80-k} &= 0.973\,25 \\ \sum_{k=0}^{14} \binom{80}{k} 0.1^k 0.9^{80-k} &= 0.987\,65 \end{aligned}$$

   Somit müssten 14 von 80 zu schnell fahren, um mit einer WS von $1.24\%$ zufällig auf einer Grundwahrscheinlichkeit von 10% zu beruhen ("Irrtumswahrscheinlichkeit" von $1.24\%$).

4. Der Architekt Mario Botta verwendet in seiner Architektur oft einfache geometrische Grundformen. Die gemauerte Aussenwand der Kapelle in Mogno (Tessin) ist drehzylinderförmig, die Ebene des Glasdachs schneidet diesen Zylinder unter einem Winkel von $45\,^\circ$.



**Vertikalschnitt durch die Achse**

a) Welchen Flächeninhalt hat das Glasdach in Abhängigkeit vom Zylinderradius r ?
Das Dach ist genauso breit wie hoch $(45^\circ)$, also 2r. Die Fläche ist eine Ellipse mit der kleinen Achse $2b = 2r$ und der großen Achse $2a = 2r\sqrt{2}$. Die Fläche einer Ellipse ergibt sich zu $A = \pi ab = \pi\sqrt{2}r^2$.

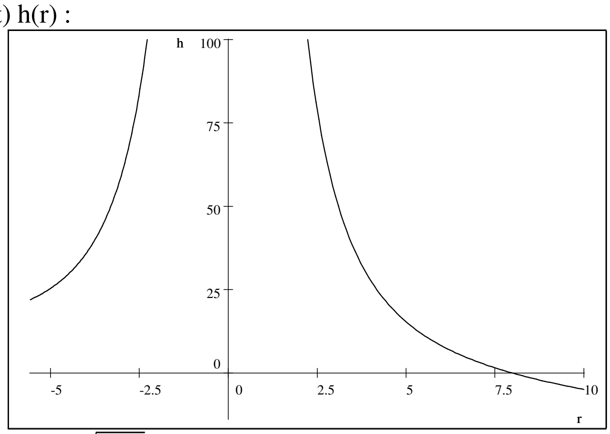
b) Der Volumeninhalt der Kapelle betrage $1600\text{m}^3$.
Bestimmen Sie den Radius des Zylinders so, dass die für den Wärmeverlust massgebende Aussenfläche (Wand und Dach) möglichst klein wird ?
Die Wand setzt sich aus der Wand eines Zylinders der Höhe h (unten) und der Wand eines halben Zylinders der Höhe 2r zusammen. Die Aussenfläche W ergibt sich zu :

$$\begin{aligned} W &= M + A \\ W &= Zylinder_h + \frac{1}{2}Zylinder_{2r} + A \\ W &= 2\pi r \cdot h + \frac{1}{2}2\pi r \cdot 2r + \pi\sqrt{2}r^2 \\ W &= 2\pi r \cdot h + \pi\left(2+\sqrt{2}\right)r^2 \end{aligned}$$

Das Volumen ergibt sich aus den selben zwei Zylindern :

$$\begin{aligned} V &= V_{Zylinder_h} + \frac{1}{2}V_{Zylinder_{2r}} = 1600 \\ V &= \pi r^2 \cdot h + \frac{1}{2}\pi r^2 \cdot 2r = 1600 \\ h &= \frac{1600 - \pi r^3}{\pi r^2} \end{aligned}$$

zur Veranschaulichung (nicht verlangt) h(r) :

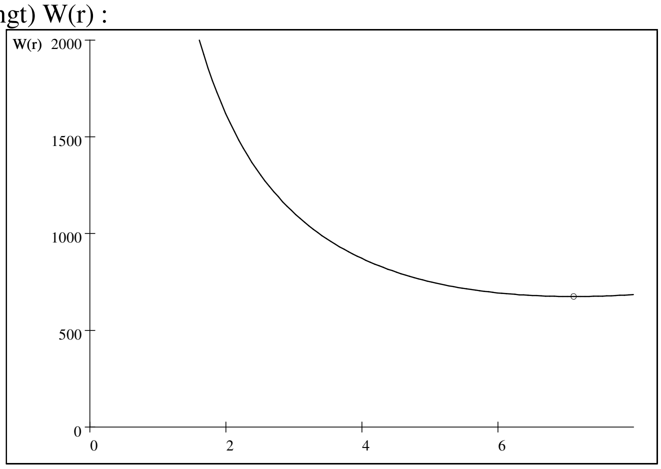



Der Definitionsbereich von h(r) ist $0 \leq r \leq \sqrt[3]{\frac{1600}{\pi}} = 7,\,985\,9$.

Somit wird W(r) :

$$\begin{aligned}
W(r) &= 2\pi r \cdot \frac{1600 - \pi r^3}{\pi r^2} + \pi\left(2 + \sqrt{2}\right) r^2 \\
W(r) &= \frac{3200}{r} + \pi r^2 \sqrt{2} \\
W'(r) &= 2\pi r\sqrt{2} - \frac{3200}{r^2} = 0 \\
r^3 &= \frac{1600}{\pi\sqrt{2}} \\
r &= \sqrt[3]{\frac{1600}{\pi\sqrt{2}}} \\
W'(r) &= \frac{6400}{r^3} + 2\pi\sqrt{2} > 0 \text{ für alle r}
\end{aligned}$$

$r = \sqrt[3]{\frac{1600}{\pi\sqrt{2}}} = 7.1146$ ist also ein Minimum mit $W\left(\sqrt[3]{\frac{1600}{\pi\sqrt{2}}}\right) = 674.67$
Ränder des Definitionsbereichs :
$\lim\limits_{h\to 0} W(r) \to \infty$, also kein Minimum.
$W\left(\sqrt[3]{\frac{1600}{\pi}}\right) = 684.05$, also ebenfalls kein Minimum (knapp).
zur Veranschaulichung (nicht verlangt) W(r) :



5. Gegeben sei die Kurve $K : y = \frac{\ln^2 x}{x^s},\ für\ s > 1, s\ konstant.$

a) Untersuchen Sie K hinsichtlich Definitionsbereich und Verhalten an dessen Rändern.

$D = ]0;\infty[$

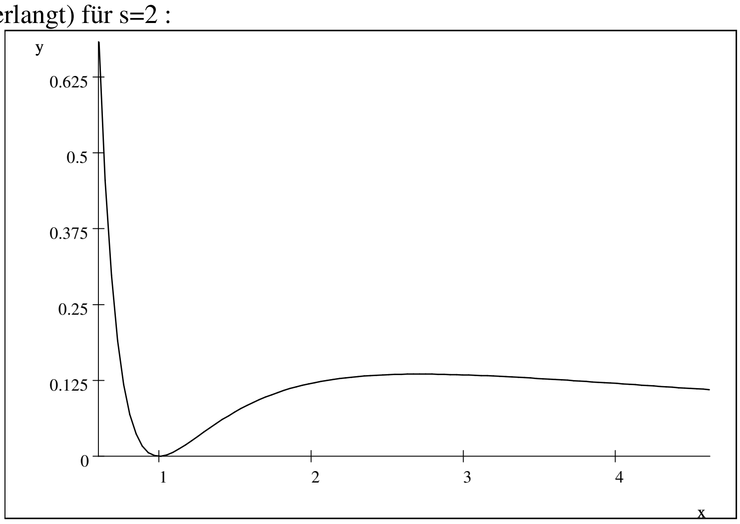
$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^s} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln^2 x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^s\right)} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^s} &= \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{2}{x}\ln x}{\frac{s}{x}x^s} = \lim_{x\to\infty} \frac{2}{s}\frac{\ln x}{x^s} = \frac{2}{s}\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x^s} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^s} &= \frac{2}{s}\lim_{x\to\infty} \frac{\frac{d}{dx}\left(\ln x\right)}{\frac{d}{dx}\left(x^s\right)} = \frac{2}{s}\lim_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{s}{x}x^s} \\
\lim_{x\to\infty} \frac{\ln^2 x}{x^s} &= \frac{2}{s}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{sx^s} = \frac{2}{s^2}\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x^s} = 0
\end{aligned}
$$

$$
\lim_{x\to 0} \frac{\ln^2 x}{x^s} = \frac{2}{s^2}\lim_{x\to 0}\frac{1}{x^s} = \infty
$$

b) Berechnen Sie die Koordinaten aller Punkte mit horizontaler Tangente (in Abhängigkeit von s).

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{\ln^2 x}{x^s} \\
y' &= \frac{2\ln x - s\ln^2 x}{x^{s+1}} = 0 \\
2\ln x - s\ln^2 x &= 0 \\
\ln x\left(2 - s\ln x\right) &= 0 \\
x_1 &= 1, y_1 = 0 \\
x_2 &= e^{\frac{2}{s}}, y_2 = \frac{4}{e^2 s^2}
\end{aligned}
$$

zur Veranschaulichung (nicht verlangt) für s=2 :




c) Deuten Sie $A(x) = \int_1^\infty \frac{\ln^2 x}{x^s}dx$ als Inhalt eines Flächenstücks (qualitative Skizze!) und berechnen Sie A(s) exakt. (Tipp : partielle Integration!).

Skizze (s.o.)

$$
\begin{aligned}
A(s) &= \int_1^\infty \frac{\ln^2 x}{x^s} dx = \int_1^\infty \underbrace{\ln^2 x}_{u} \cdot \underbrace{x^{-s}}_{v\prime} dx \\
A(s) &= \left[ \underbrace{\ln^2 x}_{u} \cdot \underbrace{\frac{x^{-s+1}}{-s+1}}_{v} \right]_1^\infty - \int_1^\infty \underbrace{2\ln x \cdot \frac{1}{x}}_{u\prime} \cdot \underbrace{\frac{x^{-s+1}}{-s+1}}_{v} dx \\
A(s) &= 0 - \frac{2}{-s+1} \int_1^\infty \ln x \cdot x^{-s} dx \\
A(s) &= -\frac{2}{-s+1} \left[ \ln x \cdot \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^\infty + \frac{2}{-s+1} \int_1^\infty \frac{1}{x} \cdot \frac{x^{-s+1}}{-s+1} dx \\
A(s) &= +\frac{2}{(s-1)^2} \int_1^\infty x^{-s} dx \\
A(s) &= \frac{2}{(s-1)^2} \left[ \frac{x^{-s+1}}{-s+1} \right]_1^\infty = \frac{2}{(s-1)^3}
\end{aligned}
$$