Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Kandidat/in Nr.: ....

Herbst 2008, Basel Name/Vorname: ....

Mathematik Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik-Taschenrechner ohne Computer-Algebra-System

Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen.
Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben, so runden Sie sinnvoll.

Jede Aufgabe wird mit je maximal 12 Punkten bewertet.
Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

---

1. Die folgenden beiden Teilaufgaben 1.1. und 1.2. sind unabhängig voneinander lösbar.

   1.1. Die Grundfläche ABCD einer geraden, quadratischen Pyramide mit der Spitze S(8 / –4 / 7) liegt in der Ebene α : 2x –2y + z – 13 = 0.
   A liegt ausserdem auf der Geraden SP mit P(10 / –9 / 11).
   Bestimmen Sie den Höhenfusspunkt F und die Ecken A, B,C,D der Pyramide.

   1.2. Gegeben sind die Punkte U (1 / 5 / 0), V(2 / 5 / –2) und M(–9 / 3 / 5).
   a) Eine Kugel mit dem Mittelpunkt M berührt die Gerade durch die Punkte U und V. Berechnen Sie den Radius der Kugel und die Koordinaten des Berührungspunktes.
   b) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises der xy-Ebene mit der Kugel aus Aufgabe a).
   (Falls Sie a) nicht lösen konnten, wählen Sie für den Kugelradius r = 6.)
   c) Bestimmen Sie die Spitze des geraden Kreiskegels, welcher die Kugel im Kreis von Aufgabe b) berührt.

2. Sie haben einen normalen Spielwürfel und einen gefälschten. Beim gefälschten Würfel ist die Wahrscheinlichkeit eine 6 zu werfen $P(6)=\frac{1}{3}$, diejenige eine 1 zu werfen $P(1)=\frac{1}{12}$.
   Ferner gilt: P(2)=P(3)=P(4)=P(5).

   a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit dem gefälschten Würfel die Augenzahl 3?
   b) Sie wählen zufällig einen Würfel aus und werfen ihn zweimal. Mit welcher Wahrscheinlichkeit beträgt die Augensumme 4?
   c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wirft man mit dem normalen Spielwürfel in drei Würfen die Augensumme 15?
   d) Sie werfen den normalen Spielwürfel so oft, bis eine Augenzahl zweimal erschienen ist. Dann hören Sie auf. Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl Würfe bei diesem Experiment.
   e) Nun wählen Sie zufällig einen der beiden Würfel aus und werfen ihn sechsmal.
   Sie staunen: Fünfmal haben Sie die 6 geworfen. Sicher denken Sie nun, dass Sie den gefälschten Würfel geworfen haben. Mit welcher Wahrscheinlichkeit irren Sie sich?

3. Gegeben ist die Funktion f_a durch die Gleichung $f_a(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$.
a ist ein reeller Parameter, a > 0.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und lokale Extrema des Funktionsgraphen in Abhängigkeit von a (Die zweite Ableitung wird dabei nicht verlangt.) Zeigen Sie, dass der Funktionsgraph für alle Werte von a punktsymmetrisch zum Nullpunkt ist.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Funktion für a = 4.
c) Beweisen Sie, dass der Graph von f_a an den Rändern des Definitionsbereichs senkrecht auf der x-Achse auftrifft.
d) Für welchen Wert von a schneidet f die y-Achse in einem Winkel von 30°?
e) Der Graph von f_a begrenzt mit der positiven x-Achse ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt in Abhängigkeit von a.

4. Die folgenden beiden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar.

4.1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben Sie die Resultate in Normalform an. Stellen Sie die die Lösungen der Aufgabe b) in der Gauss'schen Zahlenebene dar.

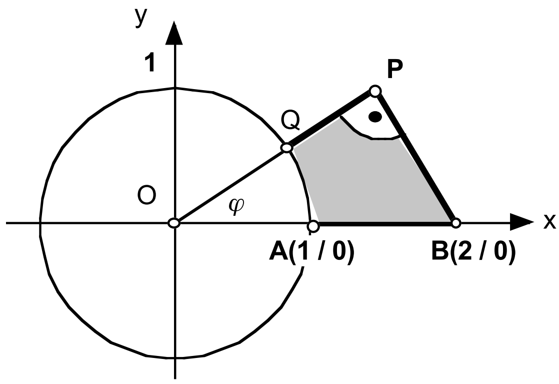
a) $\dfrac{iz - 2 + i}{2i - z} = 3 - i$ b) $z^3 = -1 + \sqrt{3} \cdot i$

4.2. Gegeben ist eine komplexe Abbildung der Gauss'schen Zahlenebene auf sich selbst mit der Vorschrift $w = f(z) = (2 - i)z - 1 + i$.
a) Diese Abbildung stellt eine Drehstreckung um den Fixpunkt an. Bestimmen Sie den Fixpunkt, den Drehwinkel und den Streckfaktor.
b) Geben Sie die Gleichung des Bildes der reellen Achse an.
c) Geben Sie die Gleichung des Bildes des Kreises |z –1+2i| = 4 an.

5. Die folgenden beiden Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar:

5.1. a) Bestimmen Sie die Ableitungsfunktion der Funktion $f(x) = x^2$ mit Hilfe der Definition $f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.
b) Beweisen Sie mit Hilfe der Methode der vollständigen Induktion:
Die Ableitungsfunktion von $f(x) = x^n$ ist $f'(x) = n \cdot x^{n-1}$ für alle n ∈ N.

5.2. Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke OBP mit dem rechten Winkel bei P und festen Eckpunkten B(2 / 0) und O. Der Winkel zwischen OP und OB sei φ, $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$
Die Seite OP schneidet den Kreis in Q.



a) Für welche Winkel φ befindet sich P ausserhalb des Kreises?
b) Für welchen Winkel φ ist der Inhalt der markierten Fläche am grössten?
Die markierte Fläche ist der ausserhalb des Kreises liegende Teil der Dreiecks OBP.