EN Herbst 2008

1. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar :
   1.1. Die Grundfläche einer geraden, quadratischen Pyramide mit der Spitze S(8/-4/7) liegt in der Ebene $\alpha : 2x-2y+z-13=0$.
   A liegt außerdem auf der Geraden SP mit P(10/-9/11).
   Bestimmen Sie den Höhenfusspunkt F und die Ecken A,B,C,D der Pyramide.
   F ergibt sich durch Schnitt der Lotgeraden n auf α durch S :

$$\begin{aligned}
n &: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \\
0 &= 2(8+2\lambda) - 2(-4-2\lambda) + 7 + \lambda - 13 \\
\lambda &= -2 \\
\overrightarrow{r_F} &= \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

A ergibt sich durch Schnitt der Geraden SP mit α :

$$\begin{aligned}
SP &: \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 & & 10 \\ -4 & - & -9 \\ 7 & & 11 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{X} &= \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \\ 7 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ -4 \end{pmatrix} \\
0 &= 2(8-2\lambda) - 2(-4+5\lambda) + 7 - 4\lambda - 13 \\
\lambda &= 1 \\
\overrightarrow{r_A} &= \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{r_C} &= \overrightarrow{r_A} + 2 \cdot \overrightarrow{AF} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{m} &= \overrightarrow{AC} \times \overrightarrow{n} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix} = 6 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{AC} &= 2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

m steht senkrecht auf AC und n, liegt also in α und ist senkrecht zu der einen Diagonalen im Quadrat. Bringt man m jetzt noch auf die Länge von AC, so hat man den Vektor von D nach B.

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{DB} &= \frac{4}{6} \cdot \overrightarrow{m} = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{r_B} &= \overrightarrow{r_F} + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{r_D} &= \overrightarrow{r_F} - \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{DB} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

   1.2. Gegeben sind die Punkte U(1/5/0), V(2/5/-2), M(-9/3/5).
   a) Eine Kugel mit dem Mittelpunkt M berührt die Gerade durch U und V.
   Berechnen Sie den Radius und die Koordinaten des Berührpunktes.

Eine Ebene α senkrecht zu g(UV) durch M schneidet UV in B :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{UV} &= \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
g &: \quad \overrightarrow{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} \\
\alpha &: \quad x - 2z + d = 0 \\
0 &= -9 - 2 \cdot 5 + d \\
d &= 19 \\
\alpha &: \quad x - 2z + 19 = 0 \\
0 &= 1 + \lambda - 2 \cdot (-2\lambda) + 19 \\
\lambda &= -4 \\
\overrightarrow{r_B} &= \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix} \\
r &= \left|\overrightarrow{BM}\right| = \left| \begin{pmatrix} -6 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} \right| = 7
\end{aligned}$$

b) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius des Schnittkreises der Kugel aus a) mit der xy-Ebene.

$$\begin{aligned}
K &: \quad (x+9)^2 + (y-3)^2 + (z-5)^2 = 49 \\
(xy)\text{-}Ebene &: \quad z = 0 \\
k &: \quad (x+9)^2 + (y-3)^2 = 24 \\
M_k\,(-9/3/0)\,, r_k &= 2\sqrt{6}
\end{aligned}$$

c) Bestimmen Sie die Spitze des geraden Kreiskegels, der die Kugel im Kreis von b) berührt.
Ein zur z-Achse paralleler Schnitt durch die Mittelpunkte von Kugel und Kreis zeigt ein rechtwinkliges Dreieck SBM (rechter Winkel bei B) und dem Höhenfusspunkt M_k. Aus Höhe ($2\sqrt{6}$) und Kathete BM=7 ergibt sich der an M anliegende Höhenabschnitt MM_k=5. Aus dem Kathetensatz ergibt sich die Hypotenuse MS zu 49/5. $\overrightarrow{MS}$ ist parallel zu $\overrightarrow{MM_k}$. Also ist $\overrightarrow{MS} = 49/25 \cdot \overrightarrow{MM_k}$

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{MS} &= 49/25 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix} = -49/5 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\
\overrightarrow{r_S} &= \overrightarrow{r_M} + \overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix} -9 \\ 3 \\ -\frac{24}{5} \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

2. Sie haben einen normalen Spielwürfel und einen gefälschten. Beim gefälschten ist die WS eine 6 zu werfen P(6)=1/3, P(1)=1/12. Ferner ist P(2)=P(3)=P(4)=P(5).

a) Mit welcher WS wirft man beim gefälschten Würfel die 3 ?

$$\begin{aligned} P(\Sigma) &= 1 = P(1) + P(6) + 4 \cdot P(3) \\ P(3) &= \frac{1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{12}}{4} = \frac{7}{48} \end{aligned}$$

b) Sie wählen zufällig einen Würfel und werfen ihn zweimal. Mit welcher WS beträgt die Augensumme 4 ?
AS=4 : {(1,3); (2,2); (3,1)}

$$\begin{aligned} P_{normal}(AS = 4) &= \frac{3}{36} \\ P_{gezinkt}(AS = 4) &= 2 \cdot \frac{1}{12} \cdot \frac{7}{48} + \left(\frac{7}{48}\right)^2 = \frac{35}{768} \\ P_{gesamt}(AS = 4) &= \frac{1}{2}\left(P_{normal} + P_{gezinkt}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{36} + \frac{35}{768}\right) = \frac{33}{512} \end{aligned}$$

c) Mit welcher WS wirft man mit den normalen Würfel in drei Würfen die AS 15 ?
AS=15 :
(6,6,3) : 3 mögliche Anordnungen (6,6,3); (6,3,6); (3,6,6)
(6,5,4) : 6 mögliche Anordnungen (6,5,4); (6,4,5); (5,6,4); (5,4,6); (4,6,5); (4,5,6)
(5,5,5) : 1 mögliche Anordnung

$$P(AS = 15) = \frac{10}{6^3} = \frac{5}{108}$$

d) Sie werfen mit dem normalen Spielwürfel so oft, bis eine Augenzahl zweimal erschienen ist.Dann hören Sie auf. Bestimmen Sie die durchschnittliche Anzahl Würfe bei diesem Experiment.
Beim zweiten Wurf ist die WS 1/6, dass die erste Zahl erneut erscheint. Beim dritten Wurf ist die WS 2/6, dass Zahl1 oder Zahl2 erscheint und 4/6 dafür, dass es weitergeht... :

$$\begin{aligned} P(2Würfe) &= \frac{1}{6} \\ P(3Würfe) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{2}{6} \\ P(4Würfe) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \\ P(5Würfe) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{4}{6} \\ P(6Würfe) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{5}{6} \\ P(7Würfe) &= \frac{5}{6} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6} \end{aligned}$$

Die durchschnittliche Anzahl Würfe ist der Erwartungswert μ :

$$\begin{aligned} \mu &= \sum_{n=2}^{7} n \cdot P(n) \\ \mu &= 2 \cdot \frac{1}{6} + 3 \cdot \frac{5}{18} + 4 \cdot \frac{5}{18} + 5 \cdot \frac{5}{27} + 6 \cdot \frac{25}{324} + 7 \cdot \frac{5}{324} \\ \mu &= \frac{1223}{324} = 3,77 \end{aligned}$$

e) Nun wählen Sie zufällig einen der beiden Würfel und werfen ihn 6 mal. Sie staunen : Sie haben fünfmal die 6 geworfen.

Sicher denken Sie nun, dass Sie den gefälschten Würfel geworfen haben. Mit welcher WS irren Sie sich ?

$$\begin{aligned}
P_{normal}(5x6) &= \binom{6}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^5\left(\frac{5}{6}\right)^1 = \frac{30}{6^6} = \frac{5}{7776} \\
P_{gezinkt}(5x6) &= \binom{6}{5}\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{2}{3}\right)^1 = \frac{4}{243} \\
P_{gesamt}(5x6) &= \frac{1}{2}\left(P_{normal} + P_{gezinkt}\right) = \frac{133}{15\,552} \\
P(Irrtum) &= \frac{\frac{1}{2}P_{normal}}{P_{gesamt}} = \frac{5}{133} = 3,76\%
\end{aligned}$$

3. Gegeben ist die Funktion f_a durch die Gleichung $f_a(x) = x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}$.a ist ein reeler Parameter, a>0.

a) Bestimmen Sie alle Nullstellen und lokalen Extrema (2 Ableitung ist nicht verlangt). Zeigen Sie, dass der Graph für alle a punktsymmetrisch zum Ursprung ist.

$$\begin{aligned} x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_{2/3} &= \pm a \end{aligned}$$

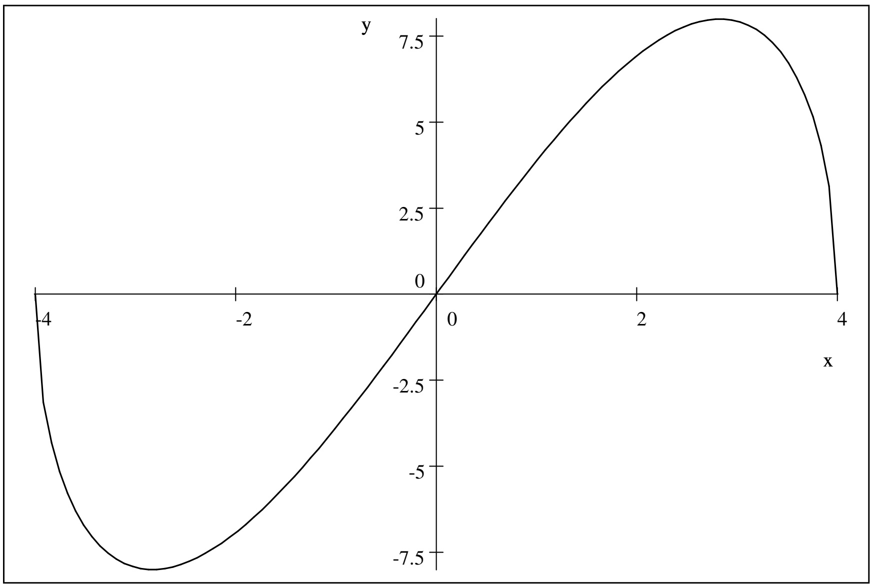
$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} &= 0 \\ x_{1/2} &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{2}a \\ y_{1/2} &= \pm\frac{1}{2}a^2 \end{aligned}$$

Die Nullstellen der ersten Ableitung sind einfach, also mit Vorzeichenwechsel, also sind es Extrema. Der Zähler der ersten Ableitung ist eine nach unten geöffnete Parabel. Also gibt es an der linken Nullstelle einen Vorzeichenwechsel von Minus nach Plus (Minimum) und an der rechten einen von Plus nach Minus (Maximum).

$$f_a(-x) = -x \cdot \sqrt{a^2 - (-x)^2} = -x \cdot \sqrt{a^2 - x^2} = -f_a(x)$$

Also ist $f_a(x)$ punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) Zeichnen Sie den Graphen für a=4.



c) Beweisen Sie, dass der Graph von f_a an den Rändern des Definitionsbereichs senkrecht auf die x-Achse auftritt.

$$\begin{aligned} D_f &: a^2 - x^2 \geq 0 \\ |x| &\leq a \\ D_f &= [-a; a] \end{aligned}$$

Die Ränder von D_f sind zugleich die Nullstellen, also gemeinsame Punkte mit der x-Achse.

$$\begin{aligned} f_a'(x) &= \frac{a^2 - 2x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} \\ \text{Polstellen bei x} &= \pm a,\ \text{d.h.} \\ D_{f'} &=]-a; a[\end{aligned}$$

Die Steigung geht also an den Rändern von D_f gegen Unendlich, also steht der Graph dort senkrecht auf der x-Achse.

d) Für welchen Wert von a schneidet der Graph von f die y-Achse in einem Winkel von 30° ?

$$\begin{aligned} f'_a(0) &= a = \tan 60^\circ \\ a &= \sqrt{3} \end{aligned}$$

e) Der Graph von f_a begrenzt mit der positiven x-Achse ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt in Abhängigkeit von a.

$$\begin{aligned} A &= \int\limits_0^a f_a(x)dx \\ A &= \int\limits_0^a \left(x \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\right) dx \\ A &= \left[-\frac{1}{3}\sqrt{a^2 - x^2}^3\right]_0^a \\ A &= \frac{1}{3}a^3 \end{aligned}$$

4. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar :

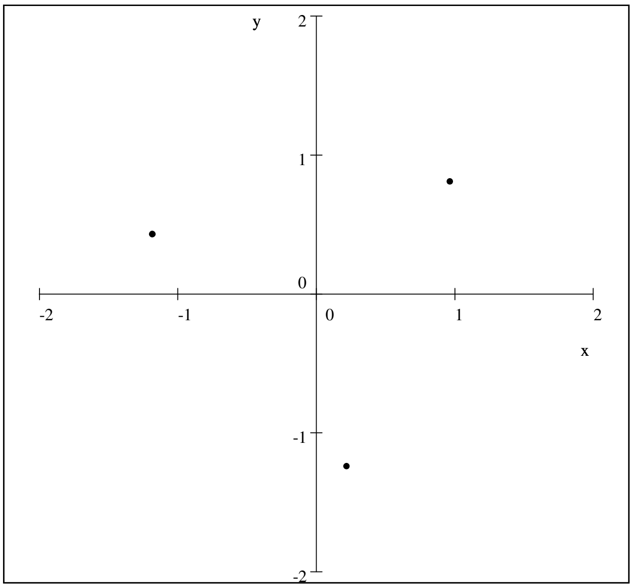
4.1. Lösen Sie die folgenden Gleichungen und geben Sie die Resultate in Normalform an. Stellen Sie die Lösungen von b) in der Gauss'schen Zahlenebene dar.

a)

$$\begin{aligned}
\frac{i\cdot z-2+i}{2\cdot i-z} &= 3-i\\
i\cdot z-2+i &= (3-i)\cdot(2\cdot i-z)\\
i\cdot z-2+i &= (2+6i)-(3-i)\,z\\
3z &= 4+5i\\
z &= \frac{4}{3}+\frac{5}{3}i
\end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned}
z^3 &= -1+\sqrt{3}i\\
-1+\sqrt{3} &= \rho\cdot cis\,(\varphi)\\
\rho &= \sqrt{1+3}=2\\
\tan(\varphi) &= -\sqrt{3}\Rightarrow\varphi=120^\circ\\
z_k &= \sqrt[3]{2}cis\left(\frac{\varphi+2\cdot k\cdot\pi}{3}\right),k=0..2\\
z_1 &= \sqrt[3]{2}cis\left(\frac{2}{9}\pi+\frac{0\cdot 2}{3}\pi\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{2}{9}\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{2}{9}\pi\right)\right)\\
z_2 &= \sqrt[3]{2}cis\left(\frac{2}{9}\pi+\frac{2}{3}\pi\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{8}{9}\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{8}{9}\pi\right)\right)\\
z_3 &= \sqrt[3]{2}cis\left(\frac{2}{9}\pi+\frac{4}{3}\pi\right)=\sqrt[3]{2}\left(\cos\left(\frac{14}{9}\pi\right)+i\cdot\sin\left(\frac{14}{9}\pi\right)\right)
\end{aligned}$$



4.2. Gegeben ist eine komplexe Abbildung der Gauss'schen Zahlenebene auf sich selbst mit der Vorschrift $w = f(z) = (2-i)\cdot z-1+i$

a) Diese Abbildung stellt eine Drehstreckung um den Fixpunkt dar. Bestimmen Sie den Fixpunkt, den Drehwinkel und den Streckungsfaktor.

$$\begin{aligned}
f(z) &= z\\
(2-i)\cdot z-1+i &= z\\
z &= 1
\end{aligned}$$

Also Fixpunkt Z(1/0).

$$f(0) = -1 + i$$

D.h. P(0/0) wir auf P'(-1/i) abgebildet. Vom Zentrum Z(1/0) aus ist das eine Drehung um den Winkel $\arctan\left(\frac{1}{2}\right) = 26.565^\circ$ im Uhrzeigersinn.
Der Abstand $ZP = 1$ vergrößert sich auf $ZP\prime = \sqrt{5}$, also ist der Streckungfaktor $\sqrt{5}$.

b) Geben Sie die Gleichung des Bildes der reellen Achse an.
Die Achse wird um $-\arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ um Z(1/0) gedreht. Man erhält also eine Gerade mit der Steigung -1/2, die durch den Punkt (1/0) geht : $y = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$

c) Geben Sie die Gleichung des Bildes des Kreises $|z - 1 + 2i| = 4$ an.

$$\begin{aligned} |z - 1 + 2i| &= 4 \\ |z - (1 - 2i)| &= 4 \\ |z - z_M| &= 4 \end{aligned}$$

Die Gleichung beschreibt also alle Punkte z, deren Abstand von z_M gerade gleich 4 ist. Also einen Kreis mit Mittelpunkt M(1/-2i) und Radius R=4.
Da Kreise auf Kreis abgebildet werden muss lediglich der neue Radius und der neue Mittelpunkt ermittelt werden.
$R' = R \cdot \sqrt{5} = 4\sqrt{5}$

$$\begin{aligned} ZM &= 2 \Rightarrow ZM' = 2\sqrt{5} \\ & \arctan(2) \end{aligned}$$

Da ZM senkrecht steht, bedeutet eine Drehung um $-arctan\left(\frac{1}{2}\right)$ das ZM' in Richtung des Vektors $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2i \end{pmatrix}$ liegt. Die Länge muss noch auf $2\sqrt{5}$ gebracht werden :

$\vec{v}' = 2\begin{pmatrix} -1 \\ 2i \end{pmatrix}$, somit ist $M\prime(-1/-4i)$.
Die Gleichung des Bildes ist somit $|z + 1 + 4i| = 4\sqrt{5}$

5. Die zwei Teilaufgaben sind unabhängig voneinander lösbar :

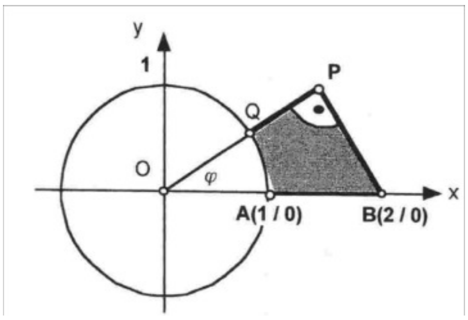
5.1. a) Bestimmen Sie die Ableitung der Funktion $f(x) = x^2$ mit Hilfe der Definition

$$\begin{aligned}
f\prime(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \\
f\prime(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\
f\prime(x) &= \lim_{h\to 0} \frac{2xh + h^2}{h} \\
f\prime(x) &= \lim_{h\to 0} (2x+h) = 2x
\end{aligned}$$

b) Beweisen Sie mit Hilfe der vollständigen Induktion :
Die Ableitung von $f(x) = x^n$ ist $f\prime(x) = n \cdot x^{n-1}$, für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\text{Induktionsanfang} &: \quad n = 1 \\
f(x) &= x \\
f'(x) &= 1 \cdot x^{1-1} = 1 \cdot x^0 = 1 \\
& \quad \text{korrekt} \\
\text{Induktionsannahme} &: \quad \text{aus } f(x) = x^n \text{ folgt } f'(x) = n \cdot x^{n-1} \\
\text{Induktionsschluss} &: \quad f(x) = x^{n+1} = x^n \cdot x \\
f'(x) &= (x^n)' \cdot x + x^n \cdot (x)' \\
f'(x) &= n \cdot x^{n-1} \cdot x + x^n \cdot 1 \\
f'(x) &= n \cdot x^n + x^n \\
f'(x) &= (n+1) \cdot x^n \\
\text{Dies ist die Induktionsannahme für } f(x) &= x^{n+1}
\end{aligned}$$

5.2. Wir betrachten rechtwinklige Dreiecke OBP mit dem rechten Winkel bei P und festen Endpunkten B(2/0) und O. Der Winkel zwischen OP und OB sei $\varphi, 0 < \varphi < \frac{\pi}{2}$.
Die Seite OP schneidet den Kreis in Q.



a) Für welche Winkel φ befindet sich P außerhalb des **Kreises** ?
P liegt auf dem Thaleskreis über OB, also ein Kreis mit Mittelpunkt A und Radius 1. Dieser Thaleskreis schneidet den Kreis um O in einem Punkt T, der mit O und A ein gleichseitiges (Seitenlänge 1) Dreieck bildet. Somit ist der Winkel $\varphi = 60°$. Für grössere Winkel liegt P im Inneren des Kreises.
b) Für welchen Winkel φ ist der Inhalt der markieren Fläche am größten ? Die markierte Fläche ist der außerhalb des Kreises liegende Teil von OBP.
Man muss den Fall $\varphi > 60°$ und $\varphi \leq 60°$ unterscheiden. Für Winkel kleiner oder gleich $60°$ ergibt sich die gesuchte

Fläche aus der Dreiecksfläche $D(\varphi)$ weniger die Sektorfläche $S(\varphi)$, φ in Bogenmass :

$$\begin{aligned}
A(\varphi) &= D(\varphi) - S(\varphi) \\
A(\varphi) &= \frac{1}{2} \cdot OP \cdot BP - \frac{\varphi}{2} \\
A(\varphi) &= \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \cos(\varphi) \cdot 2 \cdot \sin(\varphi) - \frac{\varphi}{2} \\
A(\varphi) &= \sin(2\varphi) - \frac{\varphi}{2} \\
A'(\varphi) &= 2\cos(2\varphi) - \frac{1}{2} = 0 \\
\cos(2\varphi) &= \frac{1}{4} \\
2\varphi_1 &= \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + z \cdot 2\pi \\
\varphi_1 &= \frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + z \cdot \pi \\
2\varphi_2 &= 2 \cdot \pi - \arccos\left(\frac{1}{3}\right) + z \cdot 2\pi \\
\varphi_2 &= \pi - \frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{1}{4}\right) + z \cdot \pi
\end{aligned}$$

Von diesen Winkeln liegt nur φ_1 mit z=0, also $\frac{1}{2} \cdot \arccos\left(\frac{1}{4}\right) = 0.659\,06 = 37,8^\circ$ im Definitionsbereich

$$\begin{aligned}
A''(\varphi) &= -4\sin(2\varphi) \\
A''(0.659\,06) &= -3.\,873\,0 < 0
\end{aligned}$$

also ein Maximum

Für φ größer als 60° wird die Fläche immer kleiner, also ist $\varphi = 30^\circ$ das globale Maximum.