Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Sommer 2009 Bern Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung (ohne persönliche Notizen), zugelassener Taschenrechner (insbesondere: Taschenformat, alphanumerische Anzeige von maximal zwei Zeilen, keine Möglichkeit zur Kommunikation auf Distanz!).
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall, insbesondere auch bei Ableitungen von Funktionen und Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar dargestellt werden.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite.

---

1. Für jeden Wert des positiven, reellen Parameters k ist mit $f_k(x) = -(x-k)\cdot(x-2k)$ eine Funktion f_k definiert.

a) Zeigen Sie allgemein, dass jeder dieser Funktionsgraphen genau einen Hochpunkt H hat, und geben Sie dessen (von k abhängigen) Koordinaten an.

b) Geben Sie die Funktionsgleichung $g(x) = ...$ derjenigen Kurve an, auf der alle diese Hochpunkte H liegen.

c) Unter welchem Winkel (auf ganze Grade gerundet) schneidet der Graph von f_k die x-Achse, wenn k = 2 gewählt wird?

d) Wie muss k gewählt werden, damit der Graph von f_k zusammen mit der x–Achse ein endliches Flächenstück vom Inhalt 36 begrenzt?

e) Wie muss – bei einer vorgegebenen Stelle x_o – der Parameter k gewählt werden, damit $f_k(x_0)$ extremal wird? Ergibt sich mit dieser Wahl ein Maximum oder ein Minimum?

---

2. Gegeben sind die beiden komplexen Zahlen $z_1 = 3+4i$ und $z_2 = 5+12i$.

a) z_1 und z_2 definieren die erste Seite eines positiv orientierten Quadrats. Bestimmen Sie die den andern beiden Eckpunkten entsprechenden Zahlen z_3 und z_4.

b) Bestimmen Sie zwei reelle (!) Zahlen s und t so, dass $s\cdot z_1 + t\cdot z_2 = 27+76i$ wird.

c) z_1 und z_2 definieren den Durchmesser eines Kreises k in der Gauß'schen Zahlenebene. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius von k.

d) Bringen Sie den Term $\frac{1}{z_1} - \frac{1}{\overline{z}_1}$ ohne TR–Hilfe auf Normalform a + i b (mit a, b $\in \mathbb{R}$).

e) Mit einer Drehstreckung um den Ursprung kann z_1 auf z_2 abgebildet werden. Bestimmen Sie die zugehörige Funktionsgleichung $f(z) = ...$ so, dass $f(z_1) = z_2$ wird.

---

3. Eine Ebene ε ist durch die Punkte A(1/3/2), B(2/1/4) und C(1/1/6) gegeben. Sie schneidet die xy–Ebene (also die Grundrissebene z = 0) in einer Geraden g.

a) Wie gross ist der Flächeninhalt des Dreiecks ABC?

b) Bestimmen Sie die Achsenabschnitte der Ebene ε.

c) Bestimmen Sie den Neigungswinkel φ (auf ganze Grade gerundet) der Ebene ε gegenüber der xy−Ebene.
d) Bestimmen Sie alle Punkte im ersten Quadranten der xy−Ebene, die von der x−Achse, der y−Achse und der Geraden g gleich weit entfernt sind.
e) Von C aus wird das Lot auf die Gerade (AB) gefällt. Berechnen Sie die Koordinaten des Lotfusspunktes F.

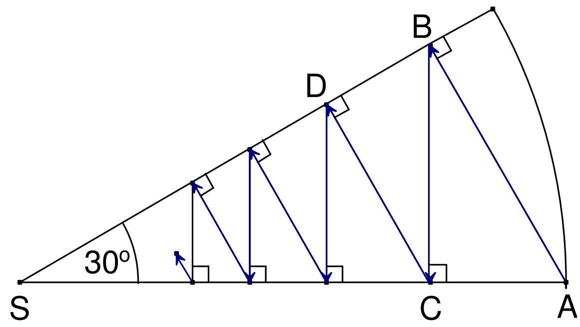
---

4. Ein gewöhnlicher Spielwürfel wird einige Male geworfen:
a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Würfen genau 3 Mal die "6" erscheint?
b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass in 10 Würfen mindestens 3 Mal die "6" erscheint?
c) In einem Experiment wird der Würfel 45 Mal geworfen. Die Zufallsvariable Z bezeichnet die Anzahl der Sechser, die man bei der Durchführung dieses Experiments erhält. Berechnen Sie ihre Standardabweichung.
d) Wie oft muss gewürfelt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 99 % mindestens 2 Mal eine "6" darunter ist?
e) Sie dürfen zwei Mal würfeln, und Sie erhalten das Quadrat von der Summe der gewürfelten beiden Augenzahlen in Franken ausbezahlt. Welchen Gewinn erwarten Sie bei diesem Spiel?

---

5. Fünf von einander unabhängige Kurzaufgaben:

a) In einem Kreissektor mit Zentriwinkel 30° und Radius $\overline{SA}$ = 10 cm ist ein Weg von A nach B, weiter nach C, weiter nach D, usw. eingezeichnet. Die Teilstrecken stehen abwechslungsweise senkrecht auf dem einen respektive auf dem anderen Schenkel (siehe Skizze rechts!). Wie lang ist der aus unendlich vielen Teilstrecken bestehende gesamte Weg?



b) Für welche x konvergiert die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty}(x^2-11x+29)^k$?

c) Berechnen Sie $\lim_{x\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{4x-\pi}$ ohne Benützung des Taschenrechners.

d) Führen Sie vor, wie das Integral $\int x\cdot\sin(x)\,dx$ mit partieller Integration berechnet werden kann. Das Verfahren der partiellen Integration an sich gilt als bekannt.

e) Für jedes n$\in\mathbb{N}$ gilt: $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{4\cdot 5}+...+\frac{1}{\mathrm{n}\cdot(\mathrm{n}+1)}=\frac{\mathrm{n}}{\mathrm{n}+1}$. Beweisen Sie dies!

(Ende)