Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe / Nr.: ....

Sommer 2010 Bern Name / Vorname: ....

Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung, Graphik–Taschenrechner ohne Computer–Algebra–System.
- Resultate wo möglich vereinfacht und exakt, sonst sinnvoll gerundet angeben.
- Lösungswege müssen überall klar ersichtlich und wo nötig kommentiert sein.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.
- Beginnen Sie die Lösung jeder Aufgabe auf einer neuen Seite.

---

1. Gegeben ist die Funktionenschar mit der Gleichung y = $f_a(x) = a^2 x e^{-\frac{x}{a}}$, wobei a ein positiver, reeller Parameter ist.
   a) Beweisen Sie, dass jede dieser Funktionen, für jedes a, genau ein relatives Maximum hat, und geben Sie für a = 2 die Koordinaten dieses Hochpunktes an.
   b) Zeichnen Sie im gleichen Diagramm die Graphen von $f_a(x)$ für a ∈ {1.5, 2}, wenn x im Intervall [–1, 8] liegt. Wählen Sie für die Einheiten auf jeder Achse je 4 Häuschen.
   c) Wie muss a gewählt werden, damit der Graph von $f_a(x)$ die x–Achse unter einem Winkel von 60° schneidet?
   d) Sie dürfen als bekannt annehmen, dass der Graph von $f_a(x)$ für jedes a genau einen Wendepunkt hat. Berechnen Sie die Gleichung der Kurve y(x) = ..., auf der die Wendepunkte aller Scharkurven liegen.
   e) Zeigen Sie, dass $F_a(x) = (-a^3)\,(a+x)\,e^{-\frac{x}{a}}$ eine Stammfunktion von $f_a(x)$ ist, und bestimmen Sie damit a so, dass das unendlich ausgedehnte, aber vom Inhalt her endliche Flächenstück zwischen der x–Achse und dem Graphen von $f_a(x)$ einen Inhalt von 256 bekommt.

---

2. Die Normalform einer Zahl z ∈ $\mathbb{C}$ ist z = x + i y (mit x, y aus $\mathbb{R}$ und i^2 = (–1)); ihre Polarform ist z = ρ cis(φ) (oder ρ (cos(φ) + i sin(φ)), oder ρ $e^{i\varphi}$), mit ρ∈ $\mathbb{R}_o^+$ und 0° ≤ φ < 360°.
   a) Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 8\,i$ in Polarform an.
   b) Durch die Funktion f mit der Gleichung w = f(z) = (1 + i) z wird die Gerade p mit der Gleichung Im(z) = 2 der Gauss'schen Zahlenebene auf eine neue Gerade q abgebildet. Gesucht ist die Gleichung von q in der Form Im(w) = u Re(w) + v (mit u, v ∈ $\mathbb{R}$).
   c) Berechnen Sie – ohne TR–Hilfe – die Gleichung der Umkehrfunktion $\overline{f}$ der Funktion f(z) = (12 – 5 i) z + 5.
   d) Geben Sie die Gleichung h(z) = ... der Funktion h an, die in der Gauss'schen Zahlenebene einer Drehstreckung mit einem Drehwinkel von 30° und einem Streckfaktor 2 um den Punkt z = 4 + 3 i entspricht. Die Gleichung muss nicht vereinfacht werden.
   e) Sei z = 1 + cos (α) + i sin (α). Für welche Winkel α zwischen 0 und 2π ist |z| ≤ 1 ? Die Aufgabe kann graphisch oder algebraisch exakt gelöst werden. Nur ein Weg ist nötig.

Bitte wenden!

3. Gegeben sind die Ebenen E: $x - 2y - 2z = 0$ und F: $x + y - z = 0$ sowie der Punkt M(11/13/12). Das Lot von M auf die Ebene E trifft diese Ebene E im Punkt B.
   a) Wie gross ist der Abstand des Punktes M von der Ebene E?
   b) Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes B.
   c) Geben Sie eine Gleichung der Schnittgeraden s der beiden Ebenen E und F an.
   d) Finden Sie eine Gleichung der Geraden g, die parallel zur Ebene F verläuft, durch den Punkt C(–1/9/9) geht und in diesem Punkt C senkrecht auf der Geraden (MC) steht.
   e) Wie gross ist der Abstand des Punktes M von der Geraden h, die durch den Ursprung und den Punkt P(5/8/8) geht?

---

4. Ein blau bemalter Holzwürfel wird in n^3 kongruente Würfelchen zerlegt, die in eine Urne gelegt und vor jeder Ziehung tüchtig durchgeschüttelt werden.
   a) Wie viele Würfelchen haben 0, 1, 2 respektive 3 blaue Seitenflächen?
   b) Es werden hintereinander, je mit Zurücklegen, zwei Würfelchen aus der Urne gezogen. Wie gross ist die (von n abhängige) Wahrscheinlichkeit, dass die Summe aller blauen Seitenflächen der beiden Würfelchen gleich 2 ist (Produkte müssen nicht ausmultipliziert werden!)?

   Für die folgenden drei Teilaufgaben c), d) und e) ist $n = 4$ vorgegeben:
   c) Es wird ein Würfelchen gezogen. Wie gross ist der Erwartungswert für die Anzahl der blau gefärbten Flächen?
   d) Wie oft muss ein Würfelchen gezogen und wieder zurückgelegt werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von über 95% mindestens ein Mal eines dabei ist, das vollständig unbemalt ist?
   e) Es wird 448-mal ein Würfelchen gezogen und wieder zurückgelegt. Die dabei insgesamt gezogene Anzahl vollständig unbemalter Würfelchen liegt mit einer Wahrscheinlichkeit von etwa 68% in einem gewissen Intervall, dessen Mitte gleich dem Erwartungswert dieser Anzahl ist. Welches sind die Grenzen dieses Intervalls?

---

5. Voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

   a) Welches ist der grösste vorkommende Winkel (auf ganze Grade gerundet) zwischen den beiden Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$, wenn t alle reellen Zahlen durchläuft?
   b) Berechnen Sie mit der Regel von de l'Hôpital den Grenzwert $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{4}} \dfrac{\sin(x) - \cos(x)}{e^{4x-\pi} - 1}$.
   c) Berechnen Sie die ersten fünf sowie die letzten beiden Ziffern der Potenz 9119^{2112}.
   d) Beweisen Sie, dass im Dreieck ABC mit Seiten $a = 8$ cm, $b = 13$ cm und $c = 15$ cm der Winkel β exakt 60° misst.
   e) An die Kurve mit der Gleichung $y = 2^x$ wird im ersten Quadranten diejenige Tangente gelegt, die durch den Ursprung geht. Bestimmen Sie ihre exakte Steigung.

(Ende)