Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe/ Kandidat/in Nr.: ....

Herbst 2011, Basel Name/Vorname: ....

Mathematik Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

Hilfsmittel: Formelsammlung (gemäss Vorgaben SBF/SMK); TR: Casio FX-82 Solar oder TI-30 eco RS.

Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben, so runden Sie sinnvoll.

Jede Aufgabe wird mit je maximal 12 Punkten bewertet.
Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

---

1. Die folgenden beiden Teilaufgaben 1.1. und 1.2. sind unabhängig voneinander lösbar.

1.1. Gegeben sind die Punkte A(2 / 4 / 6), B(–2 / 0 / 4), C(2 / 2 / 0) und D(6 / 6 / 2).

a) Ein Rhombus (Raute) ist ein ebenes Viereck mit vier gleichlangen Seiten. Beweisen Sie, dass die Punkte A,B,C,D einen Rhombus bilden und berechnen Sie alle Innenwinkel des Rhombus.

b) A,B,C,D sind die Eckpunkte der Grundfläche einer geraden Pyramide mit Volumeninhalt 1040. Bestimmen Sie die Spitze S dieser Pyramide.

1.2. Gegeben sind die Kugel K: . $x^2+y^2+z^2+4x-6y-12=0$ und die Gerade g:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 10 \end{pmatrix} + t\cdot\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

a) Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius der Kugel K.

b) Zeigen Sie, dass die Gerade g die Kugel berührt. Bestimmen Sie den Berührungspunkt.

c) Es gibt zwei Kugeln mit Radius 8, deren Mittelpunkte auf g liegen und die die Kugel K berühren. Bestimmen Sie die Mittelpunkte dieser Kugeln.

2. Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x) = 1 - 2\cdot e^{-x^2}$.

a) Bestimmen Sie Symmetrie, Definitions- und Wertebereich, Nullstellen, lokales Extremum und Wendepunkte des Funktionsgraphen. Bestimmen Sie die Gleichung der Asymptoten des Graphen von f. Zeichnen Sie den Graphen der Funktion.

b) Unter welchem Winkel schneidet der Graph von f die positive x-Achse?

c) Welche Parabel $y = a\cdot x^2 + b\cdot x + c$ hat mit dem Graphen von f die Nullstellen und den Extremalpunkt gemeinsam?

d) Wir betrachten Recktecke mit folgenden Eigenschaften:
   - Zwei Eckpunkte liegen auf der Asymptoten des Graphen von f.
   - Zwei Eckpunkte liegen auf dem Graphen von f.

   (Beachten Sie, dass alle diese Rechtecke symmetrisch zur y-Achse sind!)
   Geben Sie den Inhalt des Rechtecks mit der grössten Fläche an.
   (Der Nachweis des Maximums wird nicht verlangt.)

3. Wir betrachten Münzen mit den Seiten Kopf K und Zahl Z.

a) Vor uns liegen 30 Münzen, die Hälfte davon zeigt K. Nun suchen wir 8 Münzen aus. Wieviele Möglichkeiten gibt es, die Auswahl mit K und Z zusammenzustellen?

b) Sie werfen eine ideale Münze. Für K erhalten Sie Fr. 10.-, für Z müssen Sie Fr. 2.- abgeben und nochmals werfen. Das Spiel endet, wenn Sie K werfen oder zweimal hintereinander das Ereignis Z erhalten. Bestimmen Sie den Erwartungswert dieses Spiels.

c) Wir nehmen nun drei ideale Münzen und werfen diese gleichzeitig. Das Ergebnis lautet z.B. KZZ. Dies nennen wir einen Wurf

c_1) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, bei vier Würfen mindestens einmal ein Ergebnis, das K enthält, zu erhalten.

c_2) Wie oft müssen die drei Münzen miteinander geworfen werden, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% mindestens ein Mal ein Ergebnis eintritt, das genau 2 K enthält?

d) Für eine ideale Münze ist beim Wurf jede Seite gleichwahrscheinlich. Vor uns liegen zwei Münzen. Die eine davon ist nun nicht ideal. Ihre Wahrscheinlichkeit für K beträgt 70%. Sie wählen eine der Münzen und werfen sie 100 mal. Für jeden Wurf notieren Sie K oder Z. Sie erhalten 60 K.
Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass es sich um die nichtideale Münze handelt?

4. Die folgenden drei Teilaufgaben 4.1., 4.2 und 4.3. sind unabhängig voneinander lösbar

4.1. Lösen Sie Gleichung $z^5 = 3 - 4i$ und geben Sie die Resultate in Polarform an. Stellen Sie diese in der Gauss'schen Zahlenebene dar. Sie erhalten durch Verbinden der Punkte ein Polygon. Berechnen Sie dessen Seitenlänge(n).

4.2. Wir betrachten die komplexe lineare Abbildung der Gauss'schen Zahlenebene auf sich selbst mit der Vorschrift $w = f(z) = (1+i)\cdot z + i$.

a) Bestimmen Sie den Fixpunkt.
b) Welche geometrische Abbildung beschreibt f(z)?
c) Bestimmen Sie das Bild der Hyperbel $\mathrm{Re}(z)\cdot \mathrm{Im}(z) = 1$.

4.3. Betrachten Sie die Matrix $A=\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$.

a) Bestimmen Sie den Parameter a so, dass $\begin{pmatrix} 1/3 & 0 \\ a & -1 \end{pmatrix}$ die Inverse Matrix zu A ist.
b) Welche geometrische Abbildung erfahren die Punkte (0/y) durch A?
c) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren von A.

5. Die folgenden drei Teilaufgaben 5.1., 5.2. und 5.3. sind unabhängig voneinander lösbar

5.1. Beweisen Sie die Formel für die Summe der ersten n Glieder der geometrischen Folge.

5.2. Betrachten Sie die allgemeine Sinusfunktion $y = A\cdot \sin(ax+b) + B$. Bestimmen Sie die Parameter A, B, a und b aus folgenden Angaben: Die Sinusfunktion hat die Periode 4π, ist um π nach rechts verschoben und besitzt als Wertebereich das Intervall [−1,3].
Diese Sinusfunktion wird nun von der Geraden y = 2 geschnitten.
Bestimmen Sie die x-Koordinaten der Schnittpunkte.

5.3. Berechnen Sie $\int_0^2 x\cdot e^{2x}\,dx$ mit „partieller Integration".