Mathematik

Erweitertes Niveau

Dauer: 4 Stunden

- Hilfsmittel: Formelsammlung (gemäss Vorgaben SBF/SMK); TR: Casio FX-82 Solar oder TI-30 eco RS.
- Resultate sind vereinfacht und falls möglich exakt anzugeben: Lassen Sie also Wurzeln, gekürzte Brüche, π, etc. stehen. Falls Sie stattdessen Resultate als Dezimalbrüche angeben, so sind diese sinnvoll zu runden. Lösungen ohne Angabe eines nachvollziehbaren Lösungsweges werden nicht bewertet und ergeben keine Bewertungspunkte.
- Jede der fünf Aufgaben wird in der Bewertung gleich gewichtet. Für die Note 6 müssen nicht alle Aufgaben vollständig gelöst werden.

---

1. Für jeden Wert des reellen Parameters k ist mit $f_k(x) = 3\,(x-k)^2 - k^2$ eine Funktion f_k definiert.
   a) Zeigen Sie allgemein, dass jeder der zugehörigen Funktionsgraphen genau einen Tiefpunkt T hat, und geben Sie dessen (von k abhängige) x-Koordinate an.
   b) Für welches $k \neq 0$ ist die x-Koordinate dieses Tiefpunktes T doppelt so gross wie seine y-Koordinate?
   c) In den Nullstellen x_1 und x_2 (mit $x_1 \leq x_2$) der Funktion f_k werden Tangenten an den Graphen gezeichnet. Bestimmen Sie allgemein die (von k abhängigen) Steigungswinkel dieser Tangenten.
   d) Weiter werden durch den Punkt $Q(\,k\,/-k^2-3)$ die beiden möglichen Tangenten an den Graphen der Funktion f_k gelegt. Bestimmen Sie hier allgemein die (ebenfalls von k abhängigen) Steigungen dieser Tangenten.
   e) Wie muss k gewählt werden, damit $\int_{x_1}^{x_2} f_k(x)\,dx = -12\sqrt{3}$ wird? Die Grenzen x_1 und x_2 (mit $x_1 \leq x_2$) sind die aus c) bekannten Nullstellen der Funktion f_k.

---

2. Die komplexen Zahlen $z_1 = 0$, $z_2 = 10 - 5i$ und $z_3 = 8 + 6i$ definieren ein Dreieck in der Gauss'schen Zahlenebene.
   a) Bestimmen Sie zwei <u>reelle</u> Zahlen r und s so, dass $r \cdot z_2 + s \cdot z_3 = 6 + 2i$ wird.
   b) Berechnen Sie den Flächeninhalt des Dreiecks $z_1\,z_2\,z_3$.
   c) Finden Sie alle komplexen Lösungen (in Normalform) der Gleichung $z^2 = z_3$.
   d) Berechnen Sie den Mittelpunkt z_m der Dreiecksseite $z_1\,z_3$ und den Winkel δ zwischen dieser Dreiecksseite und der Geraden g, die durch z_2 und z_m verläuft.
   e) Durch die Funktion f mit der Gleichung $w = f(z) = (2 - i) \cdot z + 1$ wird jede komplexe Zahl z auf eine komplexe Zahl w abgebildet. Bestimmen Sie die Bilder w_2 und w_3 von z_2 und z_3 und erklären Sie die geometrische Bedeutung dieser Abbildung f.

Bitte wenden!

3. Gegeben sind ein räumliches kartesisches Koordinatensystem mit Nullpunkt O, die Ebene α: $2x + y + 2z = 6$ sowie die drei Punkte $P(15/3/9)$, $Q(-27/18/-24)$ und $R(7/7/7)$. Die Ebene α schneidet die x-, y- und z-Koordinatenachsen in Punkten U, V und W.
   a) Berechnen Sie das Volumen des Körpers $OUVW$.
   b) Wie gross ist der Abstand des Punktes P von der Ebene α?
   c) Die Gerade g, die durch P und Q geht, durchsticht die Ebene α in einem Punkt D. Berechnen Sie die Koordinaten von D.
   d) Welcher Punkt S der Geraden h, die durch P und R geht, hat den kleinsten Abstand vom Ursprung? Der Abstand selber ist nicht gefragt.
   e) Bestimmen Sie eine Parametergleichung der Geraden m der Ebene α, die durch den Punkt W geht und senkrecht auf der Schnittgeraden n der Ebene α mit der Grundrissebene $z = 0$ steht.

---

4. In einem Radio-Ratespiel sollen vier historische, nicht gleichzeitige Begebenheiten A, B, C und D zeitlich geordnet werden, was ausschliesslich durch zufälliges Raten möglich ist. Die Zufallsvariable X bezeichne die Anzahl der Begebenheiten, die ein Ratender bei einem Rateversuch auf den jeweils richtigen Platz (Erster Platz: Älteste Begebenheit, zweiter Platz: Zweitälteste Begebenheit, usw.) setzt.
   a) Wie viele verschiedene Antworten sind dabei möglich? Warum ist die Wahrscheinlichkeit $P(X = 3)$ gleich Null?
   b) Berechnen Sie $P(X = k)$ für alle möglichen Werte von k.
   c) Bestimmen Sie den Erwartungswert $E(X)$ und die Standardabweichung $\sigma(X)$ der Zufallsvariablen X.
   d) Das Radio-Ratespiel wird wöchentlich wiederholt. Wenn ein Ratender es nicht schafft, alle Begebenheiten richtig einzuordnen, so kommt in der Folgewoche ein anderer Kandidat zum Zug. Die Zufallsvariable Y bezeichne die Anzahl der Ratespiele, die nötig sind, bis ein Ratender alle vier Begebenheiten richtig zuordnet und damit das Spiel gewinnt. Berechnen Sie $P(Y = k)$ allgemein und zeigen Sie mit einer Summenformel, dass $\Sigma P(Y = k) = 1$ ist.
   e) Berechnen Sie den Erwartungswert $E(Y)$.

   Tipp: Für $|q| < 1$ gilt: $1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + \ldots = \frac{1}{(1-q)^2}$.

---

5. Fünf voneinander unabhängige Kurzaufgaben:

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{c}$ parallel zum Vektor $\begin{pmatrix} -3 \\ -2 \end{pmatrix}$ so, dass $\vec{c} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = 60$ wird.

b) Lösen Sie die Gleichung: $3^{x+1.5} + 3^{2x+1} = 4$.

c) Vereinfachen Sie: $\binom{n+1}{n-1} : \frac{(n+2)!}{2n!}$.

d) Berechnen Sie $\int x \cdot \sin(x)\, dx$.

e) Mit der linearen Abbildung $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 1.4 & 0.8 \\ -0.25 & 0.5 \end{pmatrix}$ wird jedem Vektor $\vec{x} = \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ der Vektor $\boldsymbol{A}\vec{x}$ zugeordnet. Berechnen Sie die Eigenwerte und die Eigenvektoren dieser Abbildung.

Ende