Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe/ Kandidat/in Nr.:...

Sommer 2013, Bern / Basel Name/Vorname:...

Mathematik

Erweitertes Niveau

- Bei jeder Aufgabe soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS)
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

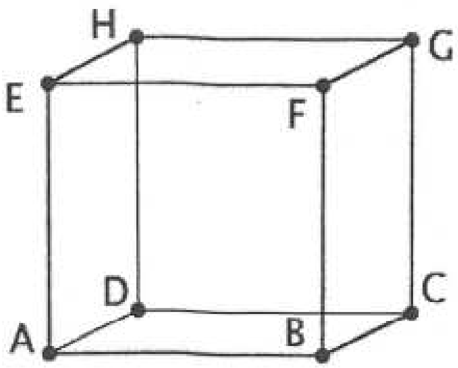
Punkteverteilung

Aufgabe	1a	1b	1c	1d	2a	2b	2c	3a	3b	3c	3d	3e	4.1	4.2	4.3	5.1	5.2
Punkte	3	2	3	3	3	3	5	2	4	2	2	2	7	3	4	6	6

Gesamthaft sind 60 Punkte zu erreichen. Für die Note 6 werden mindestens 50 Punkte verlangt.

---

1. **Vektorgeometrie (11 Punkte)**



Gegeben sind die Punkte A(2 / –1 / 3), C(10 / 1 / 1) und G(8 / 5 / –3) des nebenstehend skizzierten Würfels ABCDEFGH sowie die Gerade g:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ k \end{pmatrix}$$

a) Beweisen Sie, dass die Punkte A,C und G Eckpunkte des abgebildeten Würfels sind.

b) Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene ACG, in der A, C und G liegen.

c) Bestimmen Sie die Eckpunkte E und B des Würfels.

d) Bestimmen Sie k so , dass die Gerade g die Ebene ACG unter einem Winkel von 45° schneidet. Geben Sie diesen Schnittpunkt an.

2. **Wahrscheinlichkeitsrechnung (11 Punkte)**

Eine Schifffahrtsgesellschaft bietet vier Ausflüge an: A, B, C, D.

a) An einem bestimmten Tag möchten 16 Personen je einen Ausflug buchen.
Wieviele Möglichkeiten bestehen
(i) aus Sicht der Teilnehmenden?
(ii) aus Sicht der Schifffahrtsgesellschaft?

b) Nehmen wir an, diese 16 Personen wählen zufällig einen Ausflug aus.
Mit welcher Wahrscheinlichkeit wählen
(i) alle den gleichen Ausflug?
(ii) 4 den Ausflug A, 4 B, 4 C und 4 D?

c) Auf dem Schiff können Sie ein Glücksspiel spielen. Dabei wird ein Kartenspiel aus 10 Karten mit den Nummern 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10 benutzt. Die Karten 1,4,5,6 und 9 sind rot, die restlichen schwarz.
Sie setzen einen Einsatz von 1 Fr. und ziehen dann zufällig drei Karten ohne Zurücklegen aus dem gut gemischten Kartenspiel. Diese ordnen Sie der Grösse der Nummern nach. Haben alle Karten die gleiche Farbe, so erhalten Sie 2 Fr. , sind die Nummern fortlaufend (z. B. 2,3,4), so erhalten Sie 4 Fr. und trifft beides zu, so erhalten Sie 30 Fr. Der Einsatz ist in jedem Fall verloren.
Wieviel gewinnen Sie im Mittel pro Spiel?

3. **Differential- und Integralrechnung (12 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion f durch die Gleichung $f(x)=\dfrac{2x^2-k}{x+1}$ mit k > 0. k ≠ 2.

a) Bestimmen Sie den Definitionsbereich und die Nullstellen der Funktion f in Abhängigkeit von k.

b) Für welche Werte von k besitzt der Graph von f Extremalpunkte. Klären Sie ab, ob es sich um Hoch- oder Tiefpunkte handelt.

Für die folgenden Teilaufgaben ist k = 1.5.

c) Bestimmen Sie die Gleichung der schiefen Asymptote des Graphen von f.

d) Bestimmen Sie Nullstellen und Lokale Extrema und zeichnen Sie den Graphen von f.

e) Der Graph von f und die x-Achse begrenzen ein Flächenstück. Berechnen Sie seinen Inhalt.

4. **Drei voneinander unabhängige Teilaufgaben (14 Punkte)**

4.1. Gegeben ist die komplexe Funktion $f(z)=\left(\frac{1}{2}+k\cdot i\right)\cdot z$.

Wir betrachten die Folge $z_1=1$, $z_2=f(z_1)$, $z_3=f(z_2)$, ...

a) Es ist k = 1.

(i) Berechnen Sie z_3 in Normalform und in Polarform.

(ii) Deuten Sie die Abbildung geometrisch und bestimmen Sie $\lim_{n\to\infty}(z_n)$.

b) Für welchen reellen Wert k (k >0) gibt es ein Glied z_m der Folge, so dass $z_m=z_1$ ist. Bestimmen Sie alle möglichen Werte von m.

4.2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A = $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

4.3. Gegeben ist die Gleichung eines Kegelschnitts $x^2-4y^2+8y=0$.

Bestimmen Sie die Art des Kegelschnitts und seine Kenndaten wie: Mittelpunkt M oder Scheitel S, Halbachsen a und b, Brennpunkte, Asymptoten, und skizzieren Sie die Kurve in einem Koordinatensystem.

5. **Zwei voneinander unabhängige Teilaufgaben (12 Punkte)**

5.1. Gegeben ist die Funktion $f(x)=4\cdot e^{-2x}-1$.

a) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f im Schnittpunkt des Graphen mit der y-Achse.

b) Die in a) bestimmte Tangente begrenzt mit dem Graphen von f und der x-Achse ein Flächenstück. Lässt man dieses um die x-Achse rotieren, so entsteht ein Rotationskörper. Berechnen Sie seinen Volumeninhalt.

5.2 Gegeben ist ein Viertelkreis mit Radius 1 und und auf ihm der Punkt A. Mit der Wahl von A sind auch die Punkte B, C und D des Streckenzuges ABCD bestimmt, da bei B, C und D rechte Winkel vorliegen. Bestimmen Sie den Winkel α ($0° < \alpha < 90°$) so, dass die Strecke DB maximal wird.