Schweizerische Maturitätsprüfung Gruppe/ Kandidat/in Nr.:..

Herbst 2014, Bern Name/Vorname:..

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder Aufgabe soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS)
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Punkteverteilung

Aufgabe	1a	1b	1c	1d	1e	2a	2b	2c	2d	3a	3b	3e	3d	4.1	4.2a	4.2b	4.2c	4.2d	5.1	5.2	5.3	5.4
Punkte	2	2	1	2	4	6	3	3	4	3	2	2	4	3	3	3	2	3	3	3	3	3

Gesamthaft sind 64 Punkte zu erreichen. Für die Note 6 werden mindestens 53 Punkte verlangt.

---

1. Vektorgeometrie (11 Punkte)

Gegeben sind die Punkte A(4,2,–3) , B(2, -2,2) und C(4, –3, 2).

a) Bestimmen sie die Koordinatengleichung der Ebene ABC.

b) Zeigen Sie, dass das Dreieck ABC rechtwinklig ist und den Flächeninhalt 7.5 besitzt.

c) Bestimmen Sie S auf der Strecke $\overline{AC}$ so, dass gilt: $\overline{AS} = 2 \cdot \overline{SC}$.

d) Der in c) bestimmte Punkt S ist der Diagonalenschnittpunkt eines Trapezes mit den Diagonalen $\overline{AC}$ und $\overline{BD}$. $\overline{AB}$ ist eine der beiden parallelen Seiten. Bestimmen Sie D.

e) Welche Punkte liegen auf der Geraden senkrecht zur Ebene ABC durch A und haben von der Ebene ABC und der Ebene 2x + y + 2z –38 = 0 den gleichen Abstand?

2. Differential- und Integralrechnung (16 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion f: $y = f(x) = \dfrac{20x}{x^2+5}$.

a) Bestimmen Sie Definitions- und Wertebereich, Asymptote, Symmetrie sowie Null- und Extremstellen der Funktion f. Begründen Sie die Art der Extrema.
Skizzieren Sie den Graphen der Funktion f für x-Werte im Intervall [–10, 10] mithilfe von mindestens 5 berechneten Punkten.

b) Zeigen Sie mithilfe der Substitutionsmethode, dass $F(x) = 10 \cdot \ln(x^2+5)$ eine Stammfunktion von f(x) ist.

c) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche zwischen der Tangente im Kurvenpunkt (0, 0), dem Graphen der Funktion f sowie der Parallelen zur y-Achse durch das Extremum im 1.Quadranten.

d) Berechnen Sie den maximalen Flächeninhalt des Dreiecks APB mit A = (1, 0) , P = (u, v) und B = (u+3, 0) mit v = f(u) für u > 0.

---

3. **Wahrscheinlichkeitsrechnung (11 Punkte)**

Ein Zufallsgenerator erzeugt die Zufallszahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Jede erscheint mit der gleichen Wahrscheinlichkeit.

a) Der Zufallsgenerator erzeugt drei Zufallszahlen.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind es drei gleiche Zufallszahlen?

(ii) Mit welcher Wahrscheinlichkeit sind alle Zufallszahlen verschieden?

b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit erhält man mit fünf zufällig erzeugten Zufallszahlen genau zweimal die 2?

c) Wieviele Zufallszahlen muss der Zufallsgenerator erzeugen, damit mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % mindestens einmal die 7 erscheint?

d) Wir spielen folgendes Spiel:

Zwei Zufallszahlen werden zufällig erzeugt. Die erste Zufallszahl ist die Zehnerziffer einer zweistelligen Zahl, die Zweite die Einerziffer. (Auch die 0 darf Zehnerziffer sein.)

Wir betrachten im Folgenden die Teilbarkeit durch 3 und 7.

Falls die mit den Zufallszahlen erzeugte zweistellige Zahl nur durch 7 teilbar ist, erhält man 2 Fr., falls sie nur durch 3 teilbar ist, 1 Fr. , falls sie durch 3 und 7 teilbar ist 10 Fr. (00 ist durch jede natürliche Zahl teilbar.)

Der Einsatz von 1. Fr. ist in jedem Fall verloren.

Berechnen Sie den mittleren Gewinn bzw. Verlust bei diesem Spiel.

4. **Komplexe Zahlen (14 Punkte)**

4.1. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem exakt: $\left| \begin{array}{c} i\cdot z_1 + (1+i)\cdot z_2 = -3 \\ z_1 - i\cdot z_2 = 1+2i \end{array} \right|$

4.2. a) Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^6 = 64$ in Normalform.

Falls Sie Aufgabe a) nicht lösen können, rechnen Sie mit $z_0 = \sqrt{3}+i, z_1 = -\sqrt{3}+i, z_2 = -2i$ **weiter.**

b) Zeichnen Sie diese Lösungen z_0 , ... der obigen Gleichung in der komplexen Zahlenebene. Verschieben Sie die Figur um 3 Einheiten nach rechts und 2 Einheiten nach oben. Beschriften Sie die neuen Eckpunkte z_0', ... in Normalform.

c) Bestimmen Sie Seitenlänge und Fläche der Figur.

d) Drehen Sie nun die verschobene Figur um 45° um den Mittelpunkt der in b) bestimmten Figur z_0' , ... Wie lautet die Abbildungsgleichung, die die ursprüngliche Figur z_0 , ... in die gedrehte Figur überführt? Berechnen Sie den neuen Eckpunkt z_0'' dieser Figur.

5. **Vier voneinander unabhängige Teilaufgaben (12 Punkte)**

5.1. Der Kreis $x^2 + (y-3)^2 = 9$ wird vom Punkt Y(0,12) aus beleuchtet. Sein Schatten auf die x- Achse ist eine Strecke. Berechnen Sie deren Länge s.

5.2. Bestimmen Sie die Eigenwerte und zugehörige Eigenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

5.3. Bestimmen Sie alle Lösungen der Gleichung $2\sin^2(x) + \sin(x) - 1 = 0$ im Intervall $[0, 2\pi]$.

5.4. Bestimmen Sie die Parameter a und b der Funktion $y = f(x) = e^{ax^2+b}$ so, dass die Tangente an die Kurve an der Stelle x = 1 die Gleichung y = 2x –1 besitzt.