Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Ebikon und Bern, Sommer 2017

M A T H E M A T I K Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

Name, Vorname:

Erreichte Punktzahl:	....
Note:	....
Visum Korrigierende(r):	....

Fach:	**Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**75 Punkte**
Autoren:	H.U. Keller / J. Zinn
Fachspezifische Anweisungen:	**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.

- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.

- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).

- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe ist die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitung von Funktionen und die Lösung von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar. Ab 62 Punkten wird die Note 6 erteilt.

---

1 Analysis

Gegeben ist die Funktion mit der Gleichung $f_a(x) = a \cdot \sin(x \cdot a)$, wobei a ein reeller, nicht-negativer Parameter ist.

a) Bestimmen Sie die *x*–Koordinate der ersten positiven Nullstelle sowie beide Koordinaten des ersten Hochpunktes dieser Funktion mit einer positiven *x*–Koordinate.

b) Geben Sie die Gleichung $y = y(x) = \ldots$ an, auf der alle diese in a) berechneten ersten Hochpunkte liegen.

c) Für welche Werte von a wird der Inhalt des Flächenstücks, das im ersten Quadranten vom Graphen dieser Funktion bis zu ihrer ersten positiven Nullstelle und der x–Achse begrenzt wird, exakt gleich 2?

d) Der Graph dieser Funktion wird – zwischen *x* = 0 und bis zu ihrer ersten positiven Nullstelle – um die *x*–Achse rotiert. Wie muss a gewählt werden, damit das Volumen des dadurch begrenzten Rotationskörpers gleich 1 wird?
Hinweis für das Integral: $\int \left(a \sin(ax)\right)^2 dx = a^2 \left(\frac{x}{2} - \frac{\sin(2ax)}{4a}\right) + C$.

e) Bestimmen Sie für a = 2 die Gleichung derjenigen quadratischen Näherungs–Parabel, die den gleichen Hochpunkt, die gleiche Nullstelle *x* = 0 und die gleiche erste positive Nullstelle wie $f_2(x)$ aufweist.

---

2 Komplexe Zahlen

Durch $z_n := \left(\frac{3}{4} \cdot i\right)^n$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$) ist eine Folge komplexer Zahlen $n \mapsto z_n$ definiert.

a) Geben Sie z_1, z_2, z_3 und z_4 je in kartesischer Form an.

b) Beweisen Sie, dass für zwei beliebige komplexe Zahlen z_1, z_2 gilt: $|z_1 \cdot z_2| \equiv |z_1| \cdot |z_2|$.

c) Durch $d_n := z_{n+1} - z_n$ (mit $n \in \mathbb{N}_0$) ist die zur ursprünglichen Folge zugehörige erste Differenzenfolge definiert. Die Folge der Beträge $n \mapsto |d_n|$ bildet eine geometrische Folge; berechnen Sie $|d_0|$ und $|d_1|$, sowie die Summe $\sum_{n=0}^{\infty} |d_n|$.

d) In der komplexen Zahlenebene liegen alle Punkte, die den in a) definierten Zahlen z_n entsprechen, auf einer logarithmischen Spirale. Der Betrag r einer Zahl auf dieser Spirale ist eine Funktion ihres Arguments φ. Geben Sie eine passende Funktionsgleichung $r = r(\varphi) = \ldots$ an.

e) Die Fläche A, die von einem Ortsvektor mit Betrag $r = r(\varphi)$ in der *x*–*y*–Ebene überstrichen wird bei einem Umgang von $\varphi = 0$ bis $\varphi = 2\pi$ ist gegeben durch $A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(r(\varphi)\right)^2 d\varphi$. Berechnen Sie diese Fläche A. Verwenden Sie $r(\varphi) = \left(\frac{3}{8}\right)^{2\varphi/\pi}$, unabhängig davon, was für ein Resultat Sie in d) gefunden haben sollten.

---

3 Vektorgeometrie

Von einem Würfel ABCDEFGH (siehe Skizze) sind A(1/4/3) und B(2/8/11) benachbarte Ecken. Der Punkt D(d_1/d_2/d_3) mit $d_1 > 0$ liegt auf der Geraden AP mit P(17/–4/p_3). Achtung: P liegt zwar auf der Geraden AD, aber nicht auf der in der Skizze eingezeichneten Stelle!

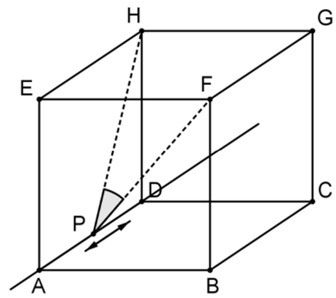
a) Bestimmen Sie p_3 und die Koordinaten von D.

b) Bestimmen Sie die Koordinaten von E(e_1/e_2/e_3), wenn bekannt ist, dass e_3 negativ ist.

c) Geben Sie eine Gleichung der Umkugel dieses Würfels an.

d) Finden Sie eine kartesische Gleichung der Tangentialebene der Umkugel im Punkt A.

e) Berechnen Sie den Winkel HPF.



---

4 Stochastik

Auf einem Flughafen werden die aufgegebenen Gepäckstücke unabhängig voneinander auf ein Förderband gelegt. Mit *p* werde die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, dass ein Gepäckstück das Ziel Zürich hat.

a) Berechnen Sie *p*, wenn die Wahrscheinlichkeit, dass von zwei aufeinanderfolgenden Gepäckstücken mindestens eines nicht das Ziel Zürich hat, gleich 97.75 % ist.

Wenn Sie aus den Angaben in der Teilaufgabe a) dieses *p* nicht gefunden haben, verwenden Sie für alle weiteren Teilaufgaben *p* = 15 %:

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von 12 aufeinander folgenden Gepäckstücken genau drei das Ziel Zürich haben?

c) Von 8 aufeinanderfolgenden Gepäckstücken hat keines das Ziel Zürich. Ist die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis gleich $(1 - p)^8$ oder gleich $1 - p^8$? Beschreiben Sie das Ereignis, welches zu der anderen Wahrscheinlichkeit gehört.

Das Handgepäck auf diesem Flughafen wird mit maximal drei Kontrollen geprüft: Eine erste Kontrolle mit einem Schnellscanner führt mit 70%iger Wahrscheinlichkeit zu einem eindeutigen Resultat; andernfalls wird eine zweite Kontrolle mit einem hochauflösenden 3D–Scanner durchgeführt, die mit 90%iger Wahrscheinlichkeit zu einem eindeutigen Resultat führt. Bringt auch diese kein eindeutiges Resultat, wird in einer dritten Kontrolle das Gepäckstück geöffnet und genau durchsucht, was auf jeden Fall zu einem eindeutigen Resultat führt.

d) Zeichnen Sie ein Baumdiagramm, welches diesem Ablauf entspricht. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass spätestens nach der zweiten Kontrolle ein eindeutiges Resultat vorliegt?

e) Die erste Kontrolle dauert 20 Sekunden, die zweite Kontrolle dauert 50 Sekunden, und die dritte Kontrolle dauert 5 Minuten. Zwischen zwei Kontrollvorgängen vergeht jeweils eine Minute. Wie lange dauert eine solche Gepäckkontrolle im Mittel?

---

5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

a) Wie viele Stellen hat die Zahl $n = 2017^{2017}$? Welches sind ihre ersten paar Ziffern? Hinweis: Betrachten Sie den Zehnerlogarithmus von n. Und welches ist die letzte Ziffer von n?

b) Der Graph der Funktion $f(x) = \sin(x)$ wird zunächst vom Ursprung aus mit einem Faktor 3 zentrisch gestreckt; dieser neue Graph wird dann um 5 in der x–Richtung und anschliessend um 7 in der y–Richtung verschoben. Welches ist die Gleichung dieses dadurch erzeugten Graphen?

c) Für welche reellen Zahlen λ und u gilt die Gleichung $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \cdot u \\ \lambda \end{pmatrix}$?

d) Sei $a \neq 0$. Welche Bedingung müssen die reellen Zahlen a, b, c, d und e erfüllen, damit der Graph der Funktion $f(x) = a \cdot x^4 + b \cdot x^3 + c \cdot x^2 + d \cdot x + e$ keinen Wendepunkt aufweist?

e) Erklären Sie anschaulich, was für ein räumliches Gebilde durch die Menge aller Punkte R (mit dem Ortsvektor $\vec{r} := \overrightarrow{OR}$) gegeben ist, für die gilt: $\left| \vec{r} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right| = 30$.

– Ende –