Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF

Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Ebikon und Bern, Sommer 2018

M A T H E M A T I K Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

....

Name, Vorname:

....

Erreichte Punktzahl: ....
Note: ....
Visum Korrigierende(r): ....

Fach:	**Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Vorgaben der Schweizerischen Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**70 Punkte**
Autoren:	A. Nüesch / Dr. D. Wirz
Fachspezifische Anweisungen:	**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Die Maximalpunktzahlen der einzelnen Aufgaben sind bei den Aufgaben angeschrieben. Die Maximalpunktzahl ist 70. Für 62 Punkte wird die Note 6 gegeben.

---

1 Vektorgeometrie (13P. = 2P. + 1P. + 6P. + 2P. + 2P.)

Wir suchen die Eckpunkte einer geraden Pyramide mit rechteckiger Grundfläche ABCD und Spitze S (S liegt senkrecht über dem Mittelpunkt M der Grundfläche.).
Die Punkte A(0/2/-2), B(-1/-3/-6) und D(2/0/0) sind gegeben.

a) Zeigen Sie, dass $\overrightarrow{AB}$ und $\overrightarrow{AD}$ rechtwinklig zueinander stehen.

b) Bestimmen Sie den Punkt C der Grundfläche ABCD.

c) Bestimmen Sie die Koordinaten der beiden möglichen Spitzen S_1 und S_2, wenn der Volumeninhalt der Pyramide 56 beträgt.

d) Wählen Sie nun diejenige Spitze S, welche positive z-Koordinate besitzt. Bestimmen Sie die Koordinatengleichung der Ebene ABS.

e) Die Ebene ABS schliesst mit der Grundfläche der Pyramide den Winkel α ein. Berechnen Sie α.

2 Analysis (15P. = 6P. + 3P. + 3P. + 3P.)

Gegeben ist die Funktion $y = f\,(x) = 4x^2 \cdot \ln\,(x)$.

a) Bestimmen Sie Definitionsmenge, Nullstellen, lokale Extrema (inkl. Art und Begründung) und Wendestellen des Graphen von f. Zeichnen Sie den Graphen von f und geben Sie die Wertemenge von f an.

b) Bestimmen Sie mithilfe der Regel von de l'Hospital $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ und $\lim\limits_{x \to 0} f'(x)$.
Zeigen Sie ebenso, dass die Bedingungen zur Anwendung der Regel erfüllt sind.
Welche geometrische Bedeutung haben diese Grenzwerte für den Graphen von f.

c) Die x-Achse, der Graph von f und die Vertikale $x = e$ begrenzen ein Flächenstück.
Berechnen Sie den Inhalt dieser Fläche. (Tipp: Partielle Integration)

d) In welchem Punkt des Graphen von f muss man die Tangente legen, damit sie durch den Nullpunkt des Koordinatensystems geht? Geben Sie auch die Gleichung dieser Tangente an.

3 Stochastik (13P. = 1.5P. + 1.5P. + 2P. + 3P. + 2.5P. + 2.5P.)

Wir platzieren 16 rote und 24 blaue Kugeln in einer Urne und mischen kräftig. Das Ziehen der Kugeln erfolgt mit Zurücklegen darf als vollkommen zufällig betrachtet werden.

a) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass bei dreimaligem Ziehen nur gleiche Farben gezogen werden?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, bei fünfmaligem Ziehen mindestens einmal eine rote Kugel zu ziehen?

c) Wie oft muss man ziehen, damit die Wahrscheinlichkeit, mindestens einmal eine blaue Kugel zu ziehen, grösser als 0.95 ist?

d) Wir betrachten folgendes Spiel:
Man zieht nacheinander Kugeln aus der Urne.
Zieht man eine blaue Kugel beim ersten Zug, so erhält man Fr. 5.—, zieht man eine blaue beim zweiten Zug Fr. 10.—, zieht man eine blaue beim dritten Zug Fr. 15.—.
Zieht man eine rote Kugel, so muss man Fr. 5.—bezahlen.
Das Spiel ist beendet, wenn entweder eine blaue Kugel gezogen wird, oder wenn die dritte Kugel gezogen wurde.
Berechnen Sie den Erwartungswert für den Gewinn bei diesem Spiel.

e) Sie gewinnen beim Spiel aus d) Fr. 5.—. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben Sie beim zweiten Zug das Spiel beendet?

f) Wir ziehen 20 Mal. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass von den 20 Kugeln 8, 9 oder 10 Kugeln rot sind?

4 Komplexe Zahlen und Lineare Abbildungen (14P.= 7P. + 7P.)

Die beiden Teilaufgaben I und II sind unabhängig voneinander lösbar.

I. Wir betrachten die Folge $z_n = 2i \cdot \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i\right)^{n-1}$, $n \in \mathbb{N}$

a) Berechnen Sie z_1, z_2 und z_3 in Normal- und Polarform und zeichnen Sie die entsprechenden Punkte in der Gauss'schen Zahlenebene.

b) Wir betrachten nun den Streckenzug $z_1 z_2 z_3$ …. .
Überlegen Sie, wo die nächsten Punkte des Streckenzugs in der Gauss'schen Zahlenebene liegen werden, und bestimmen Sie die kleinste natürliche Zahl n, für die $z_1 = z_n$ gilt.

c) Zeichnen Sie diesen Streckenzug und berechnen Sie seine Länge.

II. Betrachten Sie die Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

a) Zeigen Sie, dass die Spalten der Matrix A die Bilder der Einheitsvektoren in x- und y-Richtung der durch A beschriebenen Abbildung sind.

b) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

c) Bestimmen Sie die Bilder der Geraden g: $y = x$ und h: $y = -x$.

d) Zerlegen Sie den Vektor $\vec{a} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}$ in die Richtungen der Eigenvektoren von A und zeigen Sie, wie man daraus direkt den Bildvektor von $\vec{a}$ bestimmen kann. Zeichnen Sie die Zerlegung und die Konstruktion des Bildvektors.

5 Drei voneinander unabhängige Aufgaben (15P. = 4P. + 6P. + 5P.)

a) Bestimmen Sie alle Schnittpunkte der Funktionen

$f(x) = 2 \cdot \sin(2x - \frac{\pi}{2})$ und $g(x) = 1$ im Intervall [0, 2π].

Die x-Werte sind in Vielfachen von π anzugeben.

b) Wir untersuchen die folgende Gleichung eines Kegelschnitts:

$9x^2 - 4y^2 - 36x - 24y - 36 = 0$.

Woran erkennen Sie, dass es sich um eine Hyperbel handeln muss.

Berechnen Sie die Koordinaten des Mittelpunkts, der Scheitelpunkte und der Brennpunkte sowie die Gleichungen der Asymptoten der Hyperbel.

Skizzieren Sie die Hyperbel.

c) Finden Sie eine Formel für die folgende Summe und beweisen Sie diese mit Vollständiger Induktion:

$1 + 2 + 4 + 8 + \cdots + 2^n = \sum_{i=0}^{n} 2^i \qquad n \in \mathbb{N}_0$

– Ende –