Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Ebikon und Bern, Sommer 2019

MATHEMATIK Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

....

Name, Vorname:

....

Erreichte Punktzahl:
....
Note:
....
Visum Korrigierende(r):
....

Fach:	**Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Vorgaben der Schweizerischen Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**80 Punkte**
Autoren:	A. Nüesch / Dr. D. Wirz
Fachspezifische Anweisungen:	**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Mathematik Erweitertes Niveau

- Bei jeder der fünf Aufgaben soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Die Maximalpunktzahlen der einzelnen Aufgaben sind bei den Aufgaben angeschrieben. Die Maximalpunktzahl ist 80. Für 67 Punkte wird die Note 6 gegeben.

---

1 Vektorgeometrie (16P. = 1P. + 2P. + 2P. + 4P. + 2P.+ 5P.)

Gegeben sind die beiden Geraden g: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ und h: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 11 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

sowie die Punkte M (7 / -3 / 11), A (5 / -7 / 7) und Z (-5 / -12 / -10).

a) Zeigen Sie, dass g und h rechtwinklig zu einander stehen.

b) Zeigen Sie, dass der Punkt A auf h liegt und bestimmen Sie diejenige Gerade k, welche A enthält und senkrecht zu beiden Geraden g und h steht.

c) Zeigen Sie, dass die Gerade k die Gerade g schneidet und geben Sie den Schnittpunkt P an.

d) Es gibt 9 Würfel, welche je zwei Eckpunkte auf g und h besitzen. Beschreiben Sie die Lage dieser Würfel zu den Geraden g und h mithilfe von Skizzen und geben Sie ihre Kantenlängen an. (Beachten Sie, dass es auch Würfel gibt, bei denen die beiden Würfelpunkte auf g oder h keine Kante bilden.)

Wir betrachten nun die Kugel K mit Mittelpunkt M und Radius $\sqrt{117}$.

e) Zeigen Sie, dass die Gerade g die Kugel K im Punkt (-1 / -1 / 4) berührt.

f) Die Gerade g wird nun von Z aus beleuchtet und wirft dabei einen Schatten auf die Kugel K, welcher Teil eines Kreises ist. Bestimmen Sie Mittelpunkt und Radius dieses Kreises.

2 Analysis (17P. = 7P. + 2P. + 4P. + 4P.)

Gegeben ist die Funktion $y = f\ (x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot \sin\ (x)$ für $x \geq 0$.

a) Bestimmen Sie Nullstellen, lokale Extremalstellen und Wendestellen des Graphen von f für $x \geq 0$.
Zeichnen Sie den Graphen von f im Intervall $[0, 2\pi]$.

b) Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente in $x = \pi$. Unter welchem Winkel schneidet sie die y-Achse?

c) Zeigen Sie mithilfe partieller Integration, dass $F\ (x) = -\frac{\sqrt{3}}{4} e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot [\sin(x) + \sqrt{3}\cos(x)]$ eine Stammfunktion von $f\ (x) = e^{-\frac{1}{\sqrt{3}}x} \cdot \sin\ (x)$ ist.

d) Der Graph von von f begrenzt mit der x-Achse im Intervall $[0, \infty)$ unendlich viele Flächenstücke. Die Inhalte dieser Flächenstücke bilden eine geometrische Folge.
Berechnen Sie die Summe aller dieser unendlich vielen Flächeninhalte.

3 Stochastik (16P. = 6P. + 2P. + 2P. + 6P.)

Sie kaufen vier Rollen mit je 20 Smarties, welche in den Farben Rot (r), Blau (b) und Grün (g) im Verhältnis 3:2:5 darin enthalten sind. Bevor Sie diese essen lösen wir ein paar Aufgaben:

a) Sie entnehmen aus der 1. Rolle zufällig mit einem Griff drei Smarties. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass

a_1) es drei verschiedenfarbige Smarties sind?
a_2) es drei rote Smarties sind?
a_3) mindestens 1 blaues Smartie darunter ist?

b) Sie entnehmen und essen aus der 2. Rolle zufällig Smarties. Wie viele müssen Sie entnehmen, damit die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens ein grünes Smartie darunter ist, grösser als 95% ist?

c) Wie viele Möglichkeiten gibt es, die 20 Smarties der 3. Rolle bezüglich der Farbreihenfolge zu verspeisen?

d) Sie suchen nun einen weiteren Smartieliebhaber und entnehmen ein Smartie nach dem andern der 4. Rolle. Wird ein rotes Smartie gezogen, dürfen Sie dieses essen, wird ein blaues gezogen, darf Ihr Gegenüber es essen. Wird ein grünes Smartie gezogen, so ist das Spiel beendet. Nach drei Zügen ist das Spiel auf jeden Fall vorbei.

d_1) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau zwei Smarties essen können?

d_2) Wie gross ist der Erwartungswert für die Anzahl der gegessenen Smarties?

d_3) Im dritten Zug wird ein grünes Smartie gezogen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass Sie genau ein Smartie essen durften?

4 Komplexe Zahlen und Lineare Abbildungen (15P.= 6P. + 9P.)

Die beiden Teilaufgaben I und II sind unabhängig voneinander lösbar.

I. Komplexe Zahlen

a) Berechnen Sie alle Lösungen der Gleichung $z^3 = 8i$ in Normalform und zeichnen Sie die entsprechenden Punkte in der komplexen Zahlenebene.

b) Die Figur, welche die Punkte in Aufgabe a) bilden, wird nun um 60^0 um den Nullpunkt gedreht. Bestimmen Sie die Bildpunkte in Normalform. Geben Sie die Gleichung an, die diese Bildpunkte als Lösungen besitzt.

II. Lineare Abbildungen

a) Geben Sie die 2 mal 2 Matrix der Abbildung A an, welche die kartesischen Basisvektoren $\overrightarrow{e_x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ auf $\overrightarrow{e_1} = 2\overrightarrow{e_x} + \overrightarrow{e_y}$ und $\overrightarrow{e_y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ auf $\overrightarrow{e_2} = -3\overrightarrow{e_x} - 2\overrightarrow{e_y}$ abbildet.

b) Bestimmen Sie die Fläche des von $\overrightarrow{e_1}$ und $\overrightarrow{e_2}$ aufgespannten Parallelogramms.

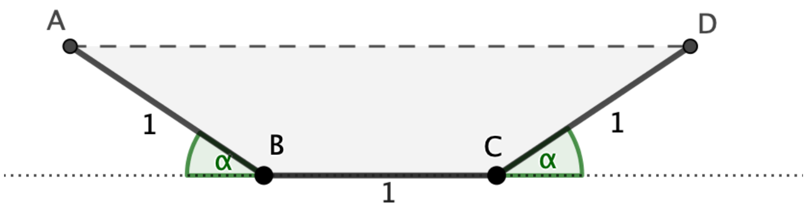
c) Geben Sie die Inverse A^{-1} der Matrix A an.

d) Bestimmen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix A.

e) Geben Sie die Gleichungen der Fixgeraden an.

5 Drei voneinander unabhängige Aufgaben (16P. = 6P. + 5P. + 5P.)

I. Bestimmen Sie in der unten gezeichneten Figur den Winkel α so, dass der Inhalt der Fläche ABCD maximal wird.



II. Gegeben ist die rekursiv definierte Folge $a_1 = 3, \quad a_{n+1} = 2a_n - 1$.
Finden Sie die explizite Definition dieser Folge und beweisen Sie diese mit Hilfe der Methode der *Vollständigen Induktion*.

III. Betrachten Sie die Gleichung des folgenden Kegelschnitts:

$$25x^2 + 9y^2 + 100x - 54y - 44 = 0$$

Bestimmen Sie im Fall einer Ellipse den Mittelpunkt, grosse und kleine Halbachse, die vier Endpunkte der Halbachsen und die Brennpunkte. Im Fall einer Hyperbel den Mittelpunkt, die Scheitelpunkte, die Brennpunkte und die Asymptoten. Im Fall einer Parabel den Scheitelpunkt, den Brennpunkt und die Leitlinie. Skizzieren Sie die Kurve in einem x-y Koordinatensystem.

– Ende –