Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung Bern, Sommer 2020

M A T H E M A T I K   E r w e i t e r t e s   N i v e a u

Kand.-Nr.:

Name, Vorname:

Erreichte Punktzahl: ....

Note: ....

Visum Korrigierende(r): ....

Fach:	**Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**
Dauer:	**4 Stunden**
Zugelassene Hilfsmittel:	Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK
Maximale Punktzahl:	**75 Punkte**
Autoren:	H.U. Keller / J. Zinn
Fachspezifische Anweisungen:	**Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Bitte leer lassen:

1					2					3					4					5					
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	1a	1b	1c	2a	2b	a	b	c	d	e	Σ
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	75

Mathematik Erweitertes Niveau

- Beginnen Sie jede der fünf Aufgaben mit einer neuen Seite. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar.

---

1 Analysis

Nach Einnahme eines Medikaments ist dessen Massenkonzentration β im Blut (in Milligramm pro Liter (= mg/L)) eines Patienten gegeben durch $\beta(t) = 10 \cdot t \cdot e^{-t/2}$, wobei t die Masszahl der in Stunden (= h) angegeben Zeit nach der Einnahme des Medikaments ist.

Es werden in dieser Aufgabe **keine Beweise** (wie z. B. die Berechnung von $\beta''(t)$ bei Extrema; ebenso entsprechend bei Wendepunkten!) verlangt.

a) Berechnen Sie die maximale Konzentration β_{max} im Blut dieses Patienten und den Zeitpunkt, zu dem diese vorhanden ist.
b) Zeichnen Sie den Graphen der Konzentration $\beta(t)$ für $0 \leq t \leq 10$; achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen.
c) Zu welchem Zeitpunkt wird das Medikament am stärksten abgebaut?
d) Dieser Patient bildet im Blut als Gegenreaktion ein nicht abbaubares Enzym, dessen Produktionsrate $r(t)$ der jeweiligen Konzentration des Medikaments in seinem Blut proportional ist. Es gilt erfahrungsgemäss: $r(t) = 20 \cdot t \cdot e^{-t/2}$ (in mg/h). Welche Masse dieses Enzyms wird in den ersten 8 Stunden nach einer erstmaligen Einnahme dieses Medikaments gebildet? Zeigen Sie dazu zunächst, dass $R(t) = (-80 - 40 \cdot t) \cdot e^{-t/2}$ eine Stammfunktion von $r(t)$ ist. Gesucht ist ein numerisches Resultat.
e) Der Patient nimmt nun aber das Medikament in gleicher Dosierung zur Zeit $t = 4$ ein weiteres Mal ein! Nehmen Sie an, dass sich die beiden Konzentrationen im Blut des Patienten addieren und der Abbau separat voneinander erfolge. Wann wird so die maximale Konzentration β^*_{max} des Medikaments erreicht? Und wie gross wird sie?

---

2 Komplexe Zahlen

a) Die Folge $\{z_n\}$ mit $z_1 = 3 + i$ und $z_4 = 9 + 4i$ ist eine arithmetische Folge. Berechnen Sie das Folgeglied z_{100} sowie die Summe $\sum_{k=1}^{100} z_k$ ihrer ersten 100 Glieder.
b) Eine andere Folge $\{z_n\}$ ist eine geometrische Folge mit $z_1 = 18 + 6i$ und $z_2 = 3 + 9i$. Berechnen Sie die exakte Summe $\sum_{k=1}^{\infty} z_k$ all ihrer Glieder in Normalform.

c) Eine dritte Folge $\{z_n\}$ ist ebenfalls eine geometrische Folge mit $z_1 = 1$ und $q = \frac{z_2}{z_1} = \sqrt[12]{2} \cdot cis(30°)$. Geben Sie q exakt in Normalform an, und zeichnen Sie z_1 bis z_{13} in einer Gauss'schen Zahlenebene ein. Wählen Sie je 10 Häuschen für die Einheiten; achten Sie auf eine korrekte Beschriftung der Achsen.

d) Die Euler'sche Formel besagt, dass für jede reelle Zahl x gilt: $e^{ix} = cos(x) + i \cdot sin(x)$. Was sagt diese Formel für den Term $(-x)$ aus? Vereinfachen Sie diese neue Formel so, dass nur noch Winkelfunktionen von $(+x)$ statt von $(-x)$ vorkommen; geben Sie dann $sin(x)$ als Linearkombination von passenden $e-$ Funktionen an.

e) Das harmonische Mittel h zweier Zahlen a und b ist die Zahl $h = \frac{2ab}{a+b}$. Berechnen Sie das harmonische Mittel von $z_1 = 5 + i$ und $z_2 = 7 + 4i$ in Normalform.

---

3 Vektorgeometrie

Gegeben ist eine Ebene ***E*** mit der Gleichung $x + 2y - 2z + 12 = 0$. Ein Quadrat $ABCD$ liegt in dieser Ebene ***E*** und hat die Ecken $A(2/0/7)$, $B(26/6/25)$ und den Mittelpunkt M.

a) Berechnen Sie die Koordinaten der Ecke C ($\rightarrow$2 Lösungen!).

b) Nehmen Sie die Ecke C mit ausschliesslich positiven Koordinaten, und berechnen Sie damit die Koordinaten von D.

Verwenden Sie für die folgenden Aufgaben c) bis e) die Koordinaten des ebenfalls in der Ebene ***E*** liegenden Quadrats $A(6/1/10); B(30/7/28); C(14/29/42); D(-10/23/24)$:

c) Betrachten Sie alle – auch schiefe – Pyramiden mit der Grundfläche $ABCD$ und einer Spitze S, deren Volumen 7488 beträgt. Alle möglichen Punkte S zusammen bilden eine Menge L. Zeichnen Sie diese Menge L mit einer prinzipiellen Skizze, ohne auf die gegebenen Zahlen Rücksicht zu nehmen. Geben Sie weiter diese Menge L in beschreibender Form an: $L = \{S(x/y/z) | ... = ...\}$.

d) Berechnen Sie die Koordinaten der beiden Punkte S, die am nächsten beim Mittelpunkt M dieses Quadrates liegen.

e) Betrachten Sie alle möglichen Strecken MS mit einer Länge 26, wenn S zu L gehört. Welchen Körper definieren alle die so möglichen Strecken zusammen? Zeichnen Sie diesen Körper (ohne Berechnungen!) in einer weiteren prinzipiellen Skizze.

---

4 Stochastik

1. Teil: Drei Freunde A, B und C besuchen an einer Chilbi eine Schiessbude, wo sie auf eine vorbeifahrende Blechfigur schiessen. Wenn diese getroffen wird, fällt sie um. A trifft bei einem Schuss mit einer Wahrscheinlichkeit von 75 %, B mit 40 % und C mit 30 %.

a) Die drei Freunde schiessen gleichzeitig je einmal auf die gleiche Figur. Mit welcher Wahrscheinlichkeit fällt die Figur um?

b) Sie schiessen wiederum gleichzeitig je einmal auf die gleiche Figur, die umfällt, weil sie genau zwei Mal getroffen worden ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit haben die beiden schlechtesten Schützen getroffen?

c) Es schiessen nun nur noch B und C jeweils gleichzeitig je einmal auf die gleiche Figur. Treffen beide nicht, versuchen sie es erneut gemeinsam. Wie oft müssen die beiden – im Mittel – je gemeinsam schiessen, wenn sie die Figur mit einer Wahrscheinlichkeit von 99 % zum Fallen bringen wollen?

2. Teil: In einer Grossstadt sind die Strassen schachbrettartig angeordnet. Sie verlaufen einerseits von West nach Ost in x –Richtung und andererseits von Süd nach Nord in y –Richtung. Der Abstand von zwei benachbarten Strassen ist jeweils 100. Ein Stadtbummler startet im Punkt $A(0/0)$. Beim Start und bei jeder Kreuzung wandert er mit einer Wahrscheinlichkeit p nach Osten und mit einer Wahrscheinlichkeit $1-p$ nach Norden weiter.

a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit $W(p)$ erreicht er den Punkt $B(700/300)$?

b) Für welches p wird die in a) errechnete Wahrscheinlichkeit $W(p)$ maximal?

---

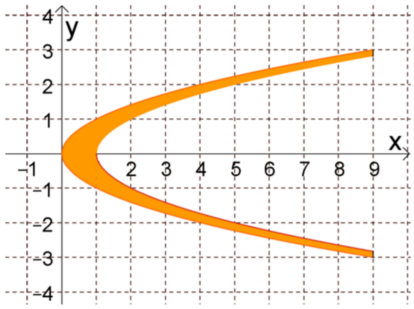
5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

a) Es ist bekannt, dass für zwei Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$ im Raum gilt: $\vec{u}\times\vec{v}\equiv-\vec{v}\times\vec{u}$. Beweisen oder widerlegen Sie:

a$_1$) $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\equiv(\vec{b}\times\vec{a})\times\vec{a}$ a$_2$) $\vec{a}\times(\vec{a}\times\vec{b})\equiv(\vec{a}\times\vec{a})\times\vec{b}$

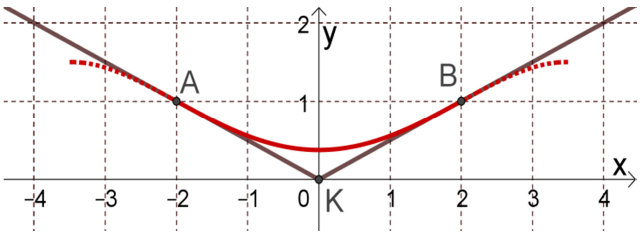
b) Der Preis eines Artikels wird um 11 % vergrössert. Dieser neue Preis wird erneut um 34 % vergrössert. Dieser neueste Preis wird nun noch einmal um 49 % vergrössert. Dieser letzte Preis soll nun in drei gleichen Schritten um jeweils je p % so reduziert werden, dass er danach wieder seinen ursprünglichen Wert hat. Berechnen Sie p.

c)

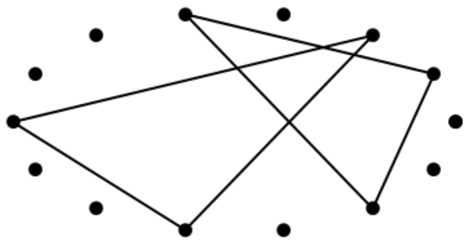


Im Plan links ist der Längsschnitt eines kleinen Glöckleins dargestellt, welches aus Bronze gegossen werden soll. Die begrenzenden Kurven sind die Graphen von $y=\pm\sqrt{x}$ respektive $y=\pm\sqrt{x-1}$; die Einheiten sind Zentimeter. Welches Volumen an Bronze wird für diesen Guss benötigt?

d) Der Plan rechts zeigt eine Strasse, die von A über eine gefährliche Kurve mit einem scharfen Knick bei K nach B führt. Dieser Knick soll ersetzt werden durch einen (ausgezogen eingezeichneten) Bogen durch A und B, der in diesen Punkten die gleiche Richtung wie das jeweilige gerade Strassenstück hat und in genau diesen beiden Punkten weder eine Rechts– noch eine Linkskurve aufweist. Berechnen Sie die Gleichung der dafür passenden ganzrationalen Funktion 4. Grades.



e) In der nebenstehenden Graphik sind zwei der vielen möglichen Dreiecke mit Ecken in den markierten Punkten eingezeichnet. Wie viele solche Dreiecke sind hier möglich?



– Ende –