Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
**Schweizerische Maturitätskommission SMK**

**Schweizerische Maturitätsprüfung** Ebikon und Bern, Sommer 2021

# MATHEMATIK Erweitertes Niveau

**Kand.-Nr.:**

**Name, Vorname:**

Erreichte Punktzahl: ...........................

Note: ...........................

Visum Korrigierende(r): ...........................

| | |
|---|---|
| Fach: | **Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau** |
| Dauer: | **4 Stunden** |
| Zugelassene Hilfsmittel: | Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK |
| Maximale Punktzahl: | **75 Punkte** |
| Autoren: | H.U. Keller / J. Zinn |
| Fachspezifische Anweisungen: | **Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.** |

Bitte leer lassen:

| 1 | | | | | 2 | | | | | 3 | | | | | 4 | | | | | 5 | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | b | c | d | e | a | b | c | d | e | a | b | c | d | e | a | b | c | d | e | a | b | c | d | e | Σ |
| 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 3 | 75 |
| | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | | |

# Mathematik

- Beginnen Sie jede der fünf Aufgaben mit einer neuen Seite. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum; Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar.

---

## 1 Analysis

Gegeben ist die von einem positiven Parameter $a$ abhängige Funktion mit der Gleichung $f_a(x) = a^2 \cdot x \cdot e^{-a \cdot x}$. Diese Funktion hat, für jeden Wert von $a$, genau einen Hochpunkt $H$ und genau einen Wendepunkt $W$, was als bekannt verwendet werden darf.

a) Skizzieren Sie für $a = 1$ ganz grob, aber qualitativ richtig, den Verlauf des Graphen von $f_1(x)$: Es müssen keine Punkte berechnet werden! Berücksichtigen Sie dabei die Tatsache, dass dieser Graph genau einen Punkt $H$ mit horizontaler Tangente und genau einen Wendepunkt $W$ hat.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des Hochpunktes $H(x_H / y_H)$ von $f_a$ in Abhängigkeit von $a$.

c) Geben Sie die Gleichung $y = y(x) = \ldots$ der Kurve an, auf der alle Hochpunkte $H$ liegen.

d) Sei $a = 1$: Der Graph der Funktion $f_1(x)$ wird für $x \geq 0$ um die x–Achse rotiert und definiert so einen unendlich ausgedehnten Rotationskörper. Wie gross ist dessen Volumen $V$? Bestimmen Sie dazu zuerst einmal die Konstante $k$ so, dass $F_1(x) = k \cdot e^{-2x} \cdot (2x^2 + 2x + 1)$ eine Stammfunktion von $\left(f_1(x)\right)^2$ wird.

e) Der oben in d) beschriebene Rotationskörper wird mit einem ebenen Schnitt durch seine Achse halbiert. Berechnen Sie den Flächeninhalt $A$ der gesamten Schnittfläche.

---

## 2 Komplexe Zahlen

Die Mengen $\mathbb{A} = \left\{ z \mid Im(z) = \left(Re(z)\right)^2 \right\}$ und $\mathbb{B} = \left\{ z \mid 4Re(z) = 4Im(z) - 3 \right\}$ sind gegeben.

a) Zeichnen Sie in einer Gauss'schen Zahlenebene (mit $-2 \leq Re(z) \leq 2$) die Zahlen $z \in \mathbb{A}$ ein. Verwenden Sie für die Einheiten auf beiden Achsen je 4 Häuschen. Auf eine korrekte Beschriftung der Achsen wird Wert gelegt.

b) Berechnen Sie alle Elemente der Menge $\mathbb{A} \cap \mathbb{B}$.

c) Für welche Zahlen $z$ aus der Menge $\mathbb{A}$ ist $|z| = \sqrt{2450}$ ?

d) Die Zahlen $z_1 = a + i \cdot b$ (mit $a, b \in \mathbb{R}$), und $z_2 = (a + ib) \cdot \left(cos(\varphi) + i \cdot sin(\varphi)\right)$ sind gegeben. Multiplizieren Sie $z_2$ vollständig aus. Zeigen Sie dann, ohne Verwendung der Polarform, dass $z_1$ und $z_2$ für jede reelle Zahl $\varphi$ den gleichen Betrag haben.

e) Bestimmen Sie den Betrag und das Argument von $z = (-1 + \sqrt{3} \cdot i)^8$; beachten Sie, dass das Argument einer komplexen Zahl $z$ immer im Intervall [0°, 360°[ liegt.

---

## 3 Vektorgeometrie

Gegeben sind eine Ebene $E$ mit der Gleichung $x + 2y + 2z - 12 = 0$ und eine Gerade $g$ mit der Gleichung $\vec{r} = \begin{pmatrix} 13 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (mit $t \in \mathbb{R}$).

a) Wie gross ist der Abstand $d$ des Ursprungs O(0/0/0) von der Ebene $E$ ?

b) Die Gerade $g$ durchstösst die Grundrissebene $z = 0$ im Punkt $G$ und die Ebene $E$ im Punkt $D$. Berechnen Sie die beiden Punkte $G$ und $D$.

c) Berechnen Sie den Winkel $\varphi$, den die Gerade $g$ mit dem Normalenvektor der Ebene $E$ bildet, auf ganze Grade gerundet.

d) Welcher Punkt $P$ der Geraden $g$ hat den kleinsten Abstand vom Punkt $A(20/15/-1)$ ?

e) Es gibt genau zwei Kugeln, bei denen sämtliche Mittelpunktskoordinaten positiv sind und die sowohl die Ebene $E$ als auch alle Hauptebenen $x = 0$, $y = 0$ und $z = 0$ berühren. Finden Sie die Radien dieser beiden Kugeln.

---

## 4 Stochastik

Eine Firma produziert Leiterplatten für eine elektronische Steuerung. Es ist bekannt, dass dabei genau 6% aller produzierten Leiterplatten fehlerhaft sind.

a) Zwei solcher Platten werden zufällig aus der gesamten Produktion herausgenommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau eine dieser beiden Platten fehlerhaft ist?

b) Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass aus 50 zufällig herausgenommenen Platten genau 3 fehlerhaft sind?

c) Ein Kunde kauft 12 dieser Platten; wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 10 davon wirklich fehlerfrei sind?

d) Die Firma führt neu eine firmeninterne Prüfung der Platten durch, die allerdings sehr unzuverlässig ist: Im Mittel werden durch diese Prüfung von 15 fehlerhaften Platten 2

als *"fehlerfrei"* bezeichnet, obwohl sie fehlerhaft sind, und von 20 fehlerfreien Platten werden 3 als *"fehlerhaft"* bezeichnet, obwohl sie fehlerfrei sind.
Eine zufällig herausgenommene Platte ist durch diese interne Prüfung gerade als *"fehlerfrei"* bezeichnet worden. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie wirklich fehlerfrei ist?

e) Solche tatsächlich fehlerfreie Platten werden in 16 Geschäften zu den jeweils folgenden Preisen (in CHF, pro Stück) zum Kauf angeboten:
$\{140,150,150,160,160,160,170,170,170,180,180,180,180,190,190,200\}$.
Bestimmen Sie davon Mittelwert, Standardabweichung, Median und Modus.

---

## 5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

a) Bestimmen Sie die Gleichung der schiefen Asymptoten beim Graphen der Funktion $f(x)=\dfrac{(x-3)\cdot(x-4)}{2x-1}$.

b) Gegeben sind $f(x)=3sin(x)$ und $g(x)=3sin^2(x)\cdot cos(x)$. Zeichnen Sie, im gleichen Koordinatensystem, die beiden zugehörigen Kurven im Bereich $0\le x\le\pi$ (Einheiten: Je 4 Häuschen), und berechnen Sie den Inhalt $A$ der Fläche, die die beiden Kurven in diesem Bereich miteinander einschliessen.

c) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^x-e^3}{5x-15}$ exakt.

d) Gesucht ist die Gleichung einer möglichst einfachen gebrochen rationalen Funktion, deren Graph sowohl eine horizontale Asymptote $y=3$ als auch eine vertikale Asymptote $x=1$ aufweist. Skizzieren Sie diesen Graphen (ohne Berechnungen).

e) Gegeben sind die Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\2\\ln(a)\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}2\\1\\0\end{pmatrix}$. Für welche Werte von $a$ gilt: $|\vec{u}\times\vec{v}|=\sqrt{34}$ ?

---

– Ende –