

Mathematik Erweitertes Niveau

- Beginnen Sie jede der fünf Aufgaben mit einer neuen Seite. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar.

1 Analysis

Gegeben ist die von einem positiven Parameter a abhängige Funktion $\mathbb{R}_0^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit der Gleichung $f_a(x) = x \cdot \sqrt{a-x}$. Diese Funktion hat – für jeden Wert von a – genau einen Hochpunkt H, was als bekannt angenommen werden darf.

- Was ist der maximal mögliche Definitionsbereich dieser Funktion?
 - Leiten sie diese Funktion nach x ab und bestimmen Sie damit die (von a abhängige) Steigung dieser Funktion an der Stelle $x=0$, sowie die Steigung an der Stelle $x=a$.
 - Bestimmen Sie die (von a abhängigen) x - und y -Koordinaten des Hochpunktes H.
 - Geben Sie die Gleichung $y = y(x) = \dots$ derjenigen Kurve an, auf der alle diese Hochpunkte H liegen.
 - Der gesamte Graph dieser Funktion wird um die x -Achse rotiert. Wie muss a gewählt werden, damit der so definierten Rotationskörper ein Volumen von $\frac{4\pi}{3}$ bekommt?
-

2 Komplexe Zahlen

- Geben Sie den Kehrwert von $z = 3 + 4i$ in Normalform an.
- Geben Sie alle Lösungen der Gleichung $z^5 = -32$ in Polarform an.
- Lösen Sie die Gleichung $z^5 - i \cdot z^4 - z + i = 0$. Tipp: Eine Lösung ist $z = i$.
- Sei $z_0 = \frac{1}{2} \cdot (\cos(60^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ))$; berechnen Sie $s = \sum_{k=0}^{\infty} z_0^k$ in Normalform.
- Berechnen Sie für $t \in \{0, 6, 12\}$ die numerischen Werte von

$$w(t) := \left(2^{-\frac{1}{12}} \cdot (\cos(30^\circ) + i \cdot \sin(30^\circ)) \right)^t \text{ in Polarform. Zeichnen Sie weiter in einer}$$

Gauss'schen Zahlenebene (Einheit: 10 Häuschen) die Kurve ein, auf welcher alle Zahlen $w(t)$ für $0 \leq t \leq 12$ liegen. Auf eine korrekte Beschriftung der Achsen wird grosser Wert gelegt.

3 Vektorgeometrie

Ein Zylinder hat eine Inkugel, wenn es eine Kugel gibt, die den Grundkreis und den Deckkreis und die Mantelfläche berührt.

Von einem Zylinder mit Inkugel und Radius 9 weiss man, dass eine seiner Mantellinien auf

der Geraden $m: \vec{r} = \begin{pmatrix} 23 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix} + u \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$ liegt, und dass die Tangente $t: \vec{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + v \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -4 \end{pmatrix}$ an

den Grundkreis des Zylinders diese Mantellinie im Punkt P schneidet.

- Berechnen Sie die Koordinaten von P.
- Gesucht ist die Gleichung derjenigen Tangentialebene an den Zylinder, in der m liegt. Wenn a) nicht gelöst wurde, verwenden Sie $P = (19, 2, -10)$.
- Berechnen Sie den Mittelpunkt M des Grundkreises des Zylinders. Wählen Sie diejenige Lösung, bei welcher die y -Koordinate positiv ist.
- Berechnen Sie den Mittelpunkt Z der Inkugel, der nur positive Koordinaten aufweist.
- Die Inkugel wird von einer Lichtquelle im Punkt P beleuchtet. Geben Sie die Gleichung derjenigen Ebene an, in der die Schattengrenze liegt.

4 Stochastik

In dem nebenstehenden 3×3 – Quadrat wird jedes der 9 nummerierten Felder durch eine aus den drei Farben rot, grün und blau zufällig ausgewählte Farbe eingefärbt.

1	2	3
4	5	6
7	8	9

- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle fünf Felder auf den beiden Diagonalen mit roter Farbe eingefärbt sind?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 3 aller 9 Felder blau eingefärbt sind?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass 3 Felder rot, 3 Felder grün und 3 Felder blau eingefärbt sind?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau zwei der drei Farben vorkommen?
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle drei Farben vorkommen?

5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

- Eine Gerade t durch den Ursprung berührt die Kurve mit der Gleichung $f(x) = e^x$. Berechnen Sie den Inhalt des endlichen Flächenstücks, das im ersten Quadranten durch den Graphen dieser Funktion und diese Tangente t begrenzt wird.
- Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, mit 24 Würfeln eines normalen Spielwürfels genau vier Mal eine 6 zu würfeln?

- c) Die Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ t \end{pmatrix}$ und $\vec{b} = \begin{pmatrix} t \\ -5 \\ t \end{pmatrix}$ schliessen einen Winkel γ ein. Für welche Werte von t wird $\gamma = 90^\circ$? Berechnen Sie weiter den Grenzwert $\lim_{t \rightarrow \infty} \gamma$; dokumentieren Sie alle Ihre Schritte und die dazugehörigen Überlegungen lückenlos.
- d) Berechnen Sie den Grenzwert $\lim_{x \rightarrow 1/2} \frac{e^x - \sqrt{e}}{8x^3 - 1}$ exakt.
- e) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion, dass $n^3 + 2n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ durch 3 teilbar ist.
-

– Ende –