Schweizerische Eidgenossenschaft
Confédération suisse
Confederazione Svizzera
Confederaziun svizra

Eidgenössisches Departement für
Wirtschaft, Bildung und Forschung WBF
Schweizerische Maturitätskommission SMK

Schweizerische Maturitätsprüfung **Zug und Bern, Sommer 2023**

MATHEMATIK Erweitertes Niveau

Kand.-Nr.:

Name, Vorname:

Erreichte Punktzahl:

....

Note:

....

Visum Korrigierende(r):

....

Fach: **Mathematik, Grundlagenfach auf erweitertem Niveau**

Dauer: **4 Stunden**

Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner gemäss Vorgaben Schweizerische Maturitätskommission SMK

Maximale Punktzahl: **75 Punkte**

Autoren: H.U. Keller / J. Zinn

Fachspezifische Anweisungen: **Beachten Sie die Hinweise auf der nächsten Seite.**

Bitte leer lassen:

1					2					3					4					5					
a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	a	b	c	d	e	Σ
3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	3	75

Mathematik Erweitertes Niveau

- Beginnen Sie jede der fünf Aufgaben mit einer neuen Seite. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung zusammen mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf drei wesentliche Ziffern.
- Zugelassene Hilfsmittel: Formelsammlung und Taschenrechner (TR) gemäss Punkt 3 und 4 der zugelassenen Hilfsmittel (FoTaBe, Fundamentum, Casio FX-82 Solar, TI-30 eco RS).
- Für die volle Punktzahl einer Aufgabe sind die Herleitung aller Resultate, insbesondere die Ableitungen von Funktionen und die Lösungen von Gleichungen, vollständig und nachvollziehbar darzustellen.

Jede Aufgabe wird mit maximal 15 Punkten bewertet. Insgesamt sind 75 Punkte erreichbar.

---

1 Analysis

Gegeben ist die von einem positiven Parameter a abhängige Funktion $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Gleichung $f_a(x) = x^2 \cdot (a - x)$.

a) Bestimmen Sie die Steigungen dieser Funktion an der Stelle $x = 0$ und an der Stelle $x = a$; beweisen Sie weiter, dass ihr Graph genau einen Wendepunkt W aufweist und bestimmen Sie dessen Koordinaten.

b) Berechnen Sie die Koordinaten des jeweils einzigen Hochpunktes H dieser Funktion, und zeichnen Sie den Graphen von $f_3(x)$ im Bereich mit $x \in [-1, 4]$ und $y \in [-3, 4]$. Verwenden Sie je 4 Häuschen für die Einheit.

c) Geben Sie die Gleichung $y = y(x) = \ldots$ derjenigen Kurve an, auf der alle diese Hochpunkte H liegen, und ergänzen Sie Ihre Graphik von Aufgabe b) mit dem Graphen dieser Kurve.

d) Wie muss der Parameter a gewählt werden, damit das Integral dieser Funktion über x von 0 bis a gleich $\frac{81}{12}$ wird?

e) Der Graph dieser Funktion mit x im Intervall $[0, a]$ wird um die x – Achse rotiert. Wie muss a gewählt werden, damit der so definierte Rotationskörper ein Volumen von $\frac{128\pi}{105}$ erhält?

---

2 Komplexe Zahlen

Gegeben sind die drei Eckpunkte eines Bilddreiecks A' mit $w_{A'} = 2 + 0i$, B' mit $w_{B'} = 5 + 2i$ und C' mit $w_{C'} = 1 + 2i$. Das Originaldreieck ABC wurde mit der Funktion

$w = f(z) = -\frac{1}{2} i \cdot z - 7 + 9i$ auf das Dreieck A'B'C' abgebildet.

a) Bestimmen Sie den einzigen Fixpunkt dieser Abbildung $w = f(z)$ sowie den speziellen Funktionswert $w_o = f\left(\dfrac{50}{3+4i}\right)$ in Normalform.

b) Die Funktion $f(z)$ ist umkehrbar. Wie lautet die Gleichung der Umkehrfunktion $z = \overline{f}(w)$?

c) Berechnen Sie die zu den Originalpunkten A, B und C gehörigen z – Werte.

d) Zeichnen Sie in einer Gauss'schen Zahlenebene die zum Bilddreieck A'B'C' gehörenden Zahlen ein, und bestimmen Sie aus dieser Graphik den Flächeninhalt dieses Bilddreiecks. Auf die korrekte Bezeichnung der Achsen wird Wert gelegt.

e) Wie kann auf einfache Weise aus dem Flächeninhalt des Bilddreiecks und der Funktionsgleichung $w = f(z)$ der Flächeninhalt des Originaldreiecks ABC berechnet werden? Begründen Sie dies, und berechnen Sie damit den Flächeninhalt des Originaldreiecks ABC.

---

3 Vektorgeometrie

Die Achse eines geraden Kreiskegels liegt auf der Geraden $g:\ \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Der Punkt $P(14/4/7)$ liegt auf der Grundkreislinie dieses Kegels. Die Punkte P und $Q(14/0/8)$ liegen auf der gleichen Mantellinie m dieses Kegels.

a) Skizzieren Sie die Situation, ohne auf die gegebenen Koordinaten einzugehen.

b) Finden Sie die Koordinaten der Kegelspitze S und des Mittelpunktes M des Grundkreises, und berechnen Sie den Radius r des Grundkreises.

c) Wie gross ist das Kegelvolumen, und wie gross der Flächeninhalt des Kegelmantels?

d) Wie lautet die Gleichung der Tangente t in P an den Grundkreis?

e) Gesucht ist weiter die Gleichung der Tangentialebene E_T in Q an den Kegel in kartesischer Form ($\rightarrow E_T : ax + by + cz + d = 0$).

---

4 Stochastik

In einem Spiel werden zwei gewöhnliche, faire Spielwürfel gleichzeitig miteinander geworfen, und das Resultat des Wurfes soll das Maximum der beiden, allenfalls auch gleichen, Augenzahlen sein. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Resultat gleich k (mit $k \in \{1, 2, 3, \ldots\}$) ist, wird mit $P(k)$ bezeichnet.

a) Berechnen Sie $P(4)$.

b) Geben Sie eine für alle $k \in \{1,2,3,...\}$ gültige, möglichst einfache allgemeine Formel für die Wahrscheinlichkeit $P(k)$ an.

c) Berechnen Sie den exakten Erwartungswert E für das Resultat dieses Wurfes.

Für die folgenden Aufgaben d) und e): In einem neuen Spiel werden nun statt der zwei Würfel drei faire Ikosaeder, jeder mit den Augenzahlen von 1 bis 20, gleichzeitig geworfen. Wiederum soll das Resultat des Wurfes das Maximum der drei auftretenden Zahlen sein.

d) Wie gross sind in diesem neuen Spiel die Wahrscheinlichkeiten $P(1), P(2)$ und $P(3)$?

e) Geben Sie eine Formel an, mit der der Erwartungswert E eines solchen Wurfes berechnet werden könnte; ein numerisches Resultat ist aber nicht verlangt.

---

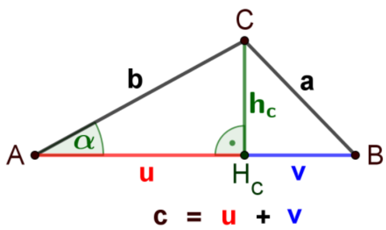
5 Fünf voneinander unabhängige Aufgaben

a) Finden Sie zunächst $\int x \cdot \ln(x)\, dx$ mit partieller Integration. Berechnen Sie damit anschliessend das bestimmte Integral $\int_1^e x \cdot \ln(x)\, dx$.

b) Für jede endliche geometrischen Reihe $S = a_1 + a_1 \cdot q + a_1 \cdot q^2 + ... + a_1 \cdot q^{n-1}$ gilt die Formel $S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1}$. Bestimmen Sie allgemein n, wenn S, a_1 und q als bekannt gelten.

Berechnen Sie damit n numerisch, wenn $S = 2059$, $a_1 = 64$ und $q = \frac{3}{2}$ ist.

c) In einem Dreieck ABC mit grösster Seite c sind nur die Seiten a, b und c bekannt. Der Höhenfusspunkt H_C teilt die Seite c in zwei Abschnitte $u = \overline{AH_c}$ und $v = \overline{H_c B}$ (s. Figur rechts). Berechnen Sie allgemein das Verhältnis **u : v**.



d) Von welchen Punkten auf der x–Achse aus gesehen erscheinen die beiden Punkte $A(1/4/7)$ und $B(9/2/1)$ unter einem rechten Winkel?

e) Berechnen Sie mit der Regel von L'Hospital $\lim\limits_{x \to \pi/6} \frac{e^{6x} - e^{\pi}}{\sqrt{3} - 2\cos(x)}$ exakt.

– Ende –