Eidg. Maturitätsprüfung Sommer 2023 . Erweitertes Niveau Mathematik
Lösungen

Aufgabe 1

a) $f(x) = x^2 \cdot (a-x) = ax^2 - x^3$

$f'(x) = 2ax - 3x^2$, $f''(x) = 2a - 6x$, $f'''(x) = -6$

$m_1 = f'(0) = \underline{0}$ und $m_2 = f'(a) = \underline{-a^2}$

Wendepunkte: $f''(x) = 0 \to 2a - 6x = 0 \to x = \frac{1}{3}a$

$f'''(\frac{1}{3}a) \neq 0$, $\underline{W(\frac{1}{3}a / \frac{2}{27}a^3)}$

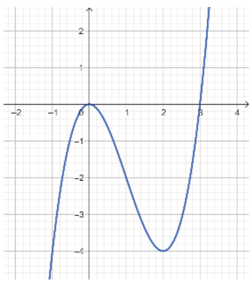
b) setze $f'(x) = 0 \to x \cdot (2a - 3x) = 0 \to x = 0$, $x = \frac{2}{3}a$

$f''(0) = 2a > 0 \to \underline{T(0/0)}$

$f''(\frac{2}{3}a) = 2a - 4a < 0 \to \underline{H(\frac{2}{3}a / \frac{4}{27}a^3)}$

Für $a = 3$: $m_1 = 0$, $m_2 = -9$

$T(0/0)$, $H(2/4)$, $W(1/2)$, $N(0/0)$, $N(3/0)$



c) $x = \frac{2}{3}a \to a = \frac{3}{2}x$ in $y = \frac{4}{27}a^3$ einsetzen

$\to y = \frac{4}{27} \cdot (\frac{3}{2}x)^3 = \frac{1}{2}x^3$

d) $\int_0^a (ax^2 - x^3)\,dx = \left[\frac{1}{3}ax^3 - \frac{1}{4}x^4\right]_0^a = \frac{1}{3}a^4 - \frac{1}{4}a^4 = \frac{1}{12}a^4 = \frac{81}{12}$

$\to a = 3$

e) $V = \pi \int_0^a x^4 \cdot (a-x)^2\,dx = \pi \cdot \int_0^a (a^2x^4 + x^6 - 2ax^5)\,dx$

$= \pi \cdot \left[\frac{a^2}{5} \cdot x^5 + \frac{1}{7}x^7 - \frac{1}{3}ax^6\right]_0^a = \pi \cdot \left(\frac{1}{5}a^7 + \frac{1}{7}a^7 - \frac{1}{3}a^7\right) = \frac{\pi}{105}a^7 = \frac{128\pi}{105}$

$\to a = 2$

Aufgabe 2

a) $w = z \rightarrow -\frac{1}{2}i \cdot z - 7 + 9i = z \rightarrow z \cdot (1 + \frac{1}{2}i) = -7 + 9i$

$z \cdot (1 + \frac{1}{2}i) \cdot (1 - \frac{1}{2}i) = (-7 + 9i) \cdot (1 - \frac{1}{2}i)$

$z \cdot \frac{5}{4} = -7 + \frac{9}{2} + \frac{25}{2}i \rightarrow$ Fixpunkt $\underline{\underline{z = -2 + 10i}}$

$\frac{50}{3+4i} = \frac{50 \cdot (3-4i)}{(3+4i) \cdot (3-4i)} = \frac{150 - 200i}{9+16} = 6 - 8i$

$w_0 = f(6 - 8i) = -\frac{1}{2}i \cdot (6 - 8i) - 7 + 9i = -3i - 4 - 7 + 9i = \underline{\underline{-11 + 6i}}$

b) $w = -\frac{1}{2}i \cdot z - 7 + 9i \rightarrow z = (w + 7 - 9i) \cdot 2i \hat{=} 18 + 2i \cdot w + 14i$

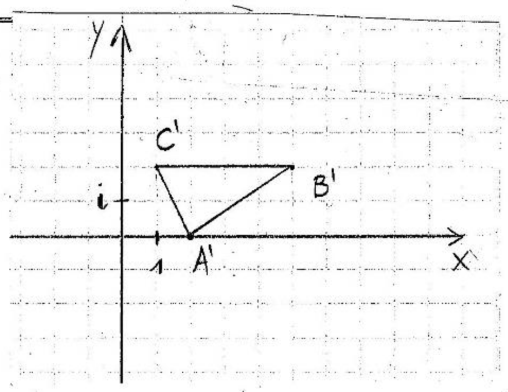
$\rightarrow \underline{\underline{z = \bar{f}(w) = 2i \cdot w + 18 + 14i}}$

c) $z_A = 2i \cdot 2 + 18 + 14i = \underline{18 + 18i}$

$z_B = 2i \cdot (5 + 2i) + 18 + 14i = \underline{16 + 24i}$

$z_C = 2i \cdot (1 + 2i) + 18 + 14i = \underline{\underline{14 + 16i}}$

d) Flächeninhalt $A'_D = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 = \underline{\underline{4}}$



e) f ist die Verkettung einer Drehstreckung um 0 und einer Verschiebung.

Der Streckfaktor ist $|-\frac{1}{2}i| = \frac{1}{2}$.

$\rightarrow$ Flächeninhalt des Originaldreiecks : $\underline{\underline{A_D = 8}}$.

Aufgabe 3

b) Gerade h durch P und Q: $\vec{r} = \begin{pmatrix}14\\0\\8\end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix}0\\-4\\1\end{pmatrix}$.

Schnittpunkt von g und h:

$$14 = 4 + 2\cdot s \;\rightarrow\; s = 5 \;\rightarrow\; \underline{\underline{S(14/-8/10)}}$$

[Kontrolle: $2 - 2\cdot s = -4\mu \rightarrow \mu = 2$
$5 + s = 8 + \mu \rightarrow \mu = 2$ ✓ $\rightarrow (14/-8/10)$ ✓]

Der Punkt M liegt auf g $\rightarrow$ $M(4+2t / 2-2t / 5+t)$.

$$\overrightarrow{MP} \perp \overrightarrow{MS} \;\Rightarrow\; \overrightarrow{MP} \cdot \overrightarrow{MS} = 0$$

$$\begin{pmatrix}10-2t\\2+2t\\2-t\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}10-2t\\-10+2t\\5-t\end{pmatrix} = 0$$

$$\rightarrow\; 100 - 40t + 4t^2 - 20 - 16t + 4t^2 + 10 - 7t + t^2 = 0$$

$$9t^2 - 63t + 90 = 0 \;\rightarrow\; t^2 - 7t + 10 = 0\,, \quad (t-2)\cdot(t-5) = 0$$

$t = 2 \rightarrow \underline{\underline{M(8/-2/7)}}$

[$t = 5 \rightarrow (14/-8/10)$, das ist die Kegelspitze S]

$$r = |\overrightarrow{MP}| = \sqrt{36 + 144 + 0} = \sqrt{180} = \underline{\underline{6\sqrt{5}}}$$

c) $V = \frac{1}{3}\pi r^2 \cdot h = \frac{1}{3}\cdot\pi\cdot 180 \cdot \sqrt{36+36+9} = \underline{\underline{540\,\pi}}$

$\overrightarrow{MS} = \begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix}$; $|\overrightarrow{MS}| = \sqrt{81} = 9 = m \rightarrow M = \pi r m = \underline{\underline{54\cdot\sqrt{5}\cdot\pi}}$

d) $\overrightarrow{MS} \times \overrightarrow{MP} = \begin{pmatrix}6\\-6\\3\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6\\6\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-18\\18\\72\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$: Richtungsvektor von t

$$\underline{\underline{t: \vec{r} = \begin{pmatrix}14\\4\\7\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}}}$$

e) $E_T \parallel \begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix}$, P und Q liegen auf E_T.

$$E_T: \vec{r} = \begin{pmatrix}14\\4\\7\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\1\\4\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\4\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-17\\-1\\-4\end{pmatrix} \parallel \begin{pmatrix}17\\1\\4\end{pmatrix}$$

$$\underline{\underline{E_T: 17x + y + 4z - 270 = 0}}$$

Aufgabe 4

a) günstige Fälle : (1/4), (2/4), (3/4), (4/4), (4/1), (4/2), (4/3)

$P(4) = \frac{7}{36}$

b) $P(k) = \frac{k + k-1}{36} = \frac{2k-1}{36}$

c) $E = \sum_{k=1}^{6} k \cdot \frac{2k-1}{36} = \frac{1}{18}\sum_{k=1}^{6} k^2 - \frac{1}{36}\sum_{k=1}^{6} k =$ (siehe Formelsammlung spezielle Summen)

$= \frac{1}{18} \cdot \frac{6 \cdot 7 \cdot 13}{6} - \frac{1}{36} \cdot \frac{6 \cdot 7}{2} = \frac{161}{36} = 4.47\bar{2}$

d) $P(1) = \frac{1}{20^3} = \frac{1}{8000}$

günstige Fälle für P(2) : (1/1/2), (1/2/1), (2/1/1), (2/2/1), (2/1/2), (1/2/2), (2/2/2)

$P(2) = \frac{7}{8000}$

günstige Fälle für P(3) : Zahlen

1, 1, 3	:	3 mal
1, 2, 3	:	6 mal
1, 3, 3		3 mal
2, 2, 3		3 mal
2, 3, 3		3 mal
3, 3, 3		1 mal

$P(3) = \frac{19}{8000}$

e) Anzahl günstige Fälle

für $k=3$: $3^3 - 2^3 = 19$; für $k=2$: $2^3 - 1^3 = 7$

allgemein : $k^3 - (k-1)^3$

$E = \sum_{k=1}^{20} \frac{k^3 - (k-1)^3}{20^3} \cdot k$

Aufgabe 5

a) $\int \underset{u'}{x} \cdot \underset{v}{\ln x}\, dx = \underset{u}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{v}{\ln x} - \int \underset{u}{\frac{x^2}{2}} \cdot \underset{v'}{\frac{1}{x}}\, dx = \frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \int \frac{1}{2} x\, dx$

$= \underline{\underline{\frac{x^2}{2} \cdot \ln x - \frac{x^2}{4}}} = F(x)$

$\left[\text{Kontrolle: } F'(x) = x \cdot \ln x + \frac{x^2}{2} \cdot \frac{1}{x} - \frac{x}{2} = x \cdot \ln x \right]$

$\int_1^e x \cdot \ln x\, dx = \frac{e^2}{2} \cdot \underbrace{\ln e}_{=1} - \frac{e^2}{4} - \left(\frac{1}{2} \cdot \underbrace{\ln 1}_{=0} - \frac{1}{4} \right) = \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{4} + \frac{1}{4} = \underline{\underline{\frac{e^2+1}{4}}}$

b) $S = a_1 \cdot \frac{q^n - 1}{q - 1} \rightarrow \frac{S \cdot (q-1)}{a_1} + 1 = q^n$

$\rightarrow n = \underline{\underline{\frac{\ln\left(\frac{S \cdot (q-1)}{a_1} + 1 \right)}{\ln q}}} = \underline{\underline{\log_q \left(\frac{S \cdot (q-1)}{a_1} + 1 \right)}}$

Numerisch: $\underline{\underline{n = 7}}$

c) Kathetensatz: $u \cdot c = b^2$, $v \cdot c = a^2$; $\frac{u \cdot c}{v \cdot c} = \frac{b^2}{a^2} \rightarrow \underline{\underline{\frac{u}{v} = \frac{b^2}{a^2}}}$

d) $P(x/0/0)$. Bedingung $\overrightarrow{PA} \perp \overrightarrow{PB}$, also $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PB} = 0$.

$\begin{pmatrix} 1-x \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9-x \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \rightarrow (1-x) \cdot (9-x) + 8 + 7 = 0 \rightarrow x^2 - 10x + 24 = 0$

$(x-6) \cdot (x-4) = 0 \rightarrow \underline{\underline{P_1(6/0/0)}}, \ \underline{\underline{P_2(4/0/0)}}$.

e) $f(x) = e^{6x} - e^{\pi}$, $f'(x) = 6 \cdot e^{6x}$

$g(x) = \sqrt{3} - 2 \cdot \cos x$, $g'(x) = 2 \cdot \sin x$.

$\lim_{x \to \pi/6} \left(\frac{6 \cdot e^{6x}}{2 \cdot \sin x} \right) = 3 \cdot \frac{e^{\pi}}{0.5} = \underline{\underline{6 \cdot e^{\pi}}}$