

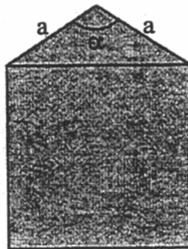
- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche,  $\pi$ , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit 10 Punkten bewertet. Die maximale Punktesumme braucht für die Note 6 nicht erreicht zu werden.

## MATHEMATIK

## TYPEN A, B, D, E

1. Der Graph der Funktion  $f(x) = x^2$  werde um  $k$  Einheiten ( $k > 0$ ) nach rechts verschoben. Dadurch erhält man den Graphen einer neuen Funktion  $g(x)$ .
  - a) Bestimmen Sie den Inhalt der Fläche  $A$  (in Abhängigkeit von  $k$ ), die der Graph der Funktion  $g(x)$  mit den beiden Koordinatenachsen im 1. Quadranten einschliesst.
  - b) Im Schnittpunkt des Graphen der Funktion  $g(x)$  mit der  $y$ -Achse wird die Tangente an diesen Graphen gelegt. Dadurch wird die Fläche  $A$  in zwei Teilflächen  $A_1$  und  $A_2$  zerlegt. Bestimmen Sie das Verhältnis der Flächeninhalte von  $A_1$  und  $A_2$  für  $k = 2$ .
  - c) Untersuchen Sie, ob das Verhältnis  $A_1 : A_2$  von der Wahl für  $k$  abhängig ist.
  
2. Ein Dreieck  $ABC$  sei durch die Koordinaten seiner Ecken  $A(-3,3)$ ,  $B(6,0)$  und  $C(5,7)$  gegeben.
  - a) Berechnen Sie die Innenwinkel dieses Dreiecks und die Winkel, welche die Gerade  $b$  (durch die Punkte  $A$  und  $C$ ) mit den Koordinatenachsen einschliesst.
  - b) Welchen Abstand hat die Gerade  $a$  (durch die Punkte  $B$  und  $C$ ) vom Ursprung?
  - c) Bestimmen Sie die Gleichung des Umkreises des Dreiecks  $ABC$ .

3. In einer Urne befinden sich 20 weisse und 25 schwarze Kugeln, die sich nur durch ihre Farbe unterscheiden.
- Man zieht zufällig und nacheinander alle 45 Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die drei zuletzt gezogenen Kugeln alle weiss sind?
  - Man zieht zufällig und gleichzeitig 5 Kugeln. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass sich unter diesen 5 Kugeln höchstens 3 weisse Kugeln befinden?
  - Man zieht nun gleichzeitig (und wieder zufällig) zwei Kugeln. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die beiden gezogenen Kugeln die gleiche Farbe besitzen.
  - Untersuchen Sie, ob es eine natürliche Zahl  $n$  gibt, für die folgende Aussage wahr ist: Durch Hinzulegen oder Wegnahme von je  $n$  weissen und  $n$  schwarzen Kugeln ist die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen von zwei gleichfarbigen Kugeln genau  $\frac{1}{2}$ . (Es werden wie bei Teilaufgabe c) wieder zwei Kugeln gleichzeitig gezogen.)
4. Es werden gleichschenklige Dreiecke mit der festen Schenkellänge  $a$  und dem von den Schenkeln eingeschlossenen Winkel  $\alpha$  betrachtet. Über der Basis des Dreiecks wird das Quadrat errichtet.



Wie muss  $\alpha$  gewählt werden, damit die totale Fläche von Dreieck und Quadrat möglichst gross wird?

5. Lösen Sie die folgenden Kurzaufgaben:

- 5.1. Bestimmen Sie alle Lösungen des folgenden Gleichungssystems:

$$\begin{cases} 2^{x+y} = 32 \\ \lg(x+7) = 2 - \lg(2y+6) \end{cases}$$

( $\lg$  bedeutet: Logarithmus zur Basis 10)

- 5.2.  $p_1$  und  $p_2$  seien zwei verschiedene Primzahlen. Die Zahl 75 ist ein Teiler der Zahl  $z = p_1^2 \cdot p_2^3$ . Bestimmen Sie eine solche Zahl  $z$  und alle Teiler von  $z$ .

- 5.3. Bestimmen Sie alle  $x$  mit  $0 \leq x \leq 2\pi$ , welche die folgende Ungleichung erfüllen:

$$\cos x \cdot \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) \leq 0$$