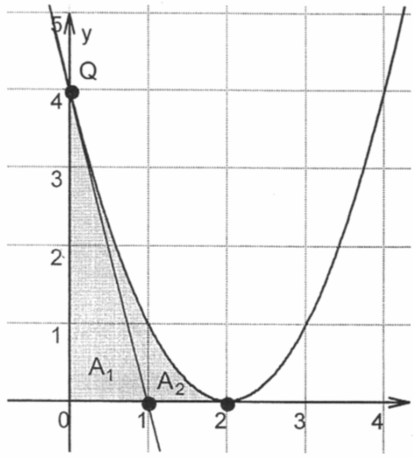
Aufgabe 1 a)

Verschobene Funktion: $g(x) = f(x-k) = (x-k)^2$

$$\underline{\underline{A(k)}} = \int_0^k (x-k)^2 dx = \left[\tfrac{1}{3}(x-k)^3\right]_0^k = \underline{\underline{\tfrac{1}{3}k^3}}.$$



Aufgabe 1 b) $g'(x) = 2\cdot(x-k)$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Punkt } Q: \ (0 \mid g(0)) = (0 \mid k^2) \\ \text{Steigung}: \ m = g'(0) = -2k \end{array}\right\} \text{Tangente } \ y = -2kx + k^2$$

Nullstelle der Tangente: $-2kx + k^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{k}{2}$

Dreiecksfläche: $A_1 = \frac{1}{2}\cdot \underbrace{\frac{k}{2}}_{\text{Grundlinie}} \cdot \underbrace{k^2}_{\text{Höhe}} = \frac{1}{4}k^3$

Restfläche: $A_2 = A(k) - A_1 = \frac{1}{3}k^3 - \frac{1}{4}k^3 = \frac{1}{12}k^3$

Flächenverhältnis: $\underline{\underline{A_1 : A_2}} = (\frac{1}{3}k^3) : (\frac{1}{12}k^3) = \underline{\underline{\frac{1}{4}}}$ unabhängig von k (beantwortet auch **Aufgabe 1c**).

Aufgabe 2 a)

$$\left.\begin{array}{l} \cos\alpha = \dfrac{\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{AB}|\cdot|\overrightarrow{AC}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}}{|\ |\cdot|\ |} = \dfrac{60}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{80}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 45^\circ}} \\ \cos\beta = \dfrac{\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}}{|\overrightarrow{BA}|\cdot|\overrightarrow{BC}|} = \dfrac{\begin{pmatrix}-9\\3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}}{|\ |\cdot|\ |} = \dfrac{30}{\sqrt{90}\cdot\sqrt{50}} = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \Rightarrow \underline{\underline{\beta = 63.435^\circ}} \end{array}\right\} \Rightarrow \underline{\underline{\gamma}} = 180^\circ - \alpha - \beta = \underline{\underline{71.565^\circ}}$$

Es ist $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$. Für $\varphi = \sphericalangle(\overrightarrow{AC}, x-\text{Achse})$ gilt: $\tan\varphi = \dfrac{4}{8} \Rightarrow \underline{\underline{\varphi = 26.565^\circ}}$.

Für $\psi = \sphericalangle(\overrightarrow{AC}, y-\text{Achse})$ folgt: $\underline{\underline{\psi}} = 90^\circ - \varphi = \underline{\underline{63.435^\circ}}$.

Aufgabe 2 b) Aus dem Richtungsvektor $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix}-1\\7\end{pmatrix}$ ergibt sich der Normalenvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix}7\\1\end{pmatrix}$.

Ferner soll a durch B gehen. Somit $a: \ 7(x - \underbrace{6}_{x_B}) + 1(y - \underbrace{0}_{y_B}) = 0 \Leftrightarrow 7x + y - 42 = 0$ (Probe mit C).

Abstand mit Hesseform: $\underline{\underline{\text{Distanz}}} = \left|\dfrac{7x_o + y_o - 42}{\sqrt{50}}\right| = \left|\dfrac{7\cdot 0 + 0 - 42}{\sqrt{50}}\right| = \underline{\underline{\dfrac{42}{\sqrt{50}}}}$

Aufgabe 2 c)

Ansatz: $k: \ (x-u)^2 + (y-v)^2 = R^2$, wobei u, v und R unbekannt sind.

$$\left.\begin{array}{l} A(-3 \mid 3) \in k \Rightarrow (-3-u)^2 + (3-v)^2 = R^2 \\ B(6 \mid 0) \in k \Rightarrow (6-u)^2 + (0-v)^2 = R^2 \\ C(5 \mid 7) \in k \Rightarrow (5-u)^2 + (7-v)^2 = R^2 \end{array}\right\} \underset{\text{subtrahieren}}{\Rightarrow} \left.\begin{array}{l} 18u - 6v - 18 = 0 \\ -2u + 14v - 38 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow u = 2 \ ; \ v = 3 \Rightarrow R = 5$$

$$\underline{\underline{k: \ (x-2)^2 + (y-3)^2 = 25}}$$

Aufgabe 3 a) Lassen Sie in Gedanken "den Film rückwärts laufen": Die Urne ist zuerst leer, sie legen nacheinander die 45 Kugeln hinein und fragen: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass die ersten drei Kugeln weiss sind. $P = \frac{20}{45}\cdot\frac{19}{44}\cdot\frac{18}{43} = \underline{\underline{\frac{6840}{85140}}} = 1.17\cdot 10^{-5}$

Aufgabe 3 b) Höchstens 3 weisse heisst: nicht 4 und nicht 5 weisse. Es bedeute w=weiss, s=schwarz.

4w = wwwws oder wwwsw oder wwsww oder wswww oder swwww. $P(4) = \underset{\text{Pfade}}{5} \cdot \underset{\text{4 weisse}}{\frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42}} \cdot \underset{\text{1 schwarze}}{\frac{25}{41}} = 0.09914$.

5w = wwwww. $P(5) = \frac{20 \cdot 19 \cdot 18 \cdot 17 \cdot 16}{45 \cdot 44 \cdot 43 \cdot 42 \cdot 41} = 0.01269$. Somit $P = 1 - P(4) - P(5) = \underline{\underline{0.888}}$

Aufgabe 3 c) ww oder ss: $P = \frac{20 \cdot 19}{45 \cdot 44} + \frac{25 \cdot 24}{45 \cdot 44} = \frac{980}{1980} = \underline{\underline{0.4949}}$

Aufgabe 3 d) Je n weisse und n schwarze Kugeln dazulegen.
In der Urne hat es dann (20+n) weisse und (25+n) schwarze Kugeln.

Dann wie in Aufgabe 3c) : $P = \frac{(20+n)\cdot(19+n)}{(45+2n)\cdot(44+2n)} + \frac{(25+n)\cdot(24+n)}{(45+2n)\cdot(44+2n)} = \frac{2n^2+88n+980}{4n^2+178n+1980} \underset{\text{soll}}{=} \frac{1}{2} \Rightarrow n = -10$.

n ist ganzzahlig und somit sinnvoll. Ferner *negativ*: Man muss offenbar <u>je 10 Kugeln *entfernen*</u>.

Aufgabe 4 Die Basis des Dreiecks heisse c.

Der Cosinussatz liefert die Quadratfläche: $c^2 = a^2 + a^2 - 2aa\cos\alpha = 2a^2(1-\cos\alpha)$.

Dreiecksfläche $= \frac{1}{2} \cdot \text{Seite} \cdot \text{Seite} \cdot (\text{Sinus des Zwischenwinkels}) = \frac{1}{2} \cdot a \cdot a \cdot \sin\alpha = \frac{1}{2}a^2 \sin\alpha$.

Gesamtfläche: $A(\alpha) = 2a^2(1-\cos\alpha) + \frac{1}{2}a^2\sin\alpha = a^2(2 - 2\cos\alpha + \frac{1}{2}\sin\alpha)$

$A'(\alpha) = a^2(0 - 2(-\sin\alpha) + \frac{1}{2}\cos\alpha) = a^2(2\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha) \underbrace{=0}_{\text{für Extr.}}$

$2\sin\alpha + \frac{1}{2}\cos\alpha = 0 \Rightarrow 2\tan\alpha + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow \tan\alpha = -\frac{1}{4} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 165.96^\circ}}$

Aufgabe 5 .1

$$\left.\begin{array}{r} 2^{x+y} = 32 \\ \lg(x+7) = 2 - \lg(2y+6) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ \lg(x+7) + \lg(2y+6) = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} x+y=5 \\ (x+7)\cdot(2y+6) = 10^2 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (x+7)(16-2x) = 100 \Rightarrow -2x^2 + 2x + 12 = 0 \Rightarrow x = \left\langle \begin{array}{l} 3 \\ -2 \end{array}\right. \Rightarrow y = \left\langle \begin{array}{l} 2 \\ 7 \end{array}\right.$$

Beide Paare bestehen die Probe im gegebenen System: $\underline{\underline{(x \mid y) = \left\langle \begin{array}{l} (3 \mid 2) \\ (-2 \mid 7) \end{array}\right.}}$

Aufgabe 5 .2

Die Primzahlzerlegung von 75 lautet $75 = 3 \cdot 5^2$. Die Zahl z kann genau nur die Primzahlen 3 und 5 enthalten. Die kleinste in Frage kommende Zahl ist $\underline{\underline{z = 5^2 \cdot 3^3 = 675}}$ mit den Teilern 3, 5, 9, 15, 25, 27, 45, 75, 135, 225, 675.

Aufgabe 5 .3

Ein Produkt ist ≤ 0, wenn die beiden Faktoren verschiedene Vorzeichen haben oder einer null ist.

Die Sinusfunktion ist um $\frac{\pi}{4}$ nach rechts verschoben.

Lösungsmenge: $\underline{\underline{\mathbf{L} = [0; \frac{\pi}{4}] \cup [\frac{\pi}{2}; \frac{5\pi}{4}] \cup [\frac{3\pi}{2}; 2\pi]}}$