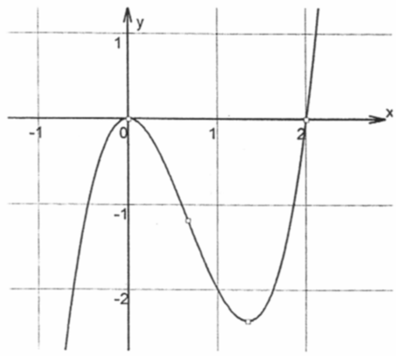
Aufgabe 1 a)

$f(x) = 2x^3 - 4x^2$; $f'(x) = 6x^2 - 8x$; $f''(x) = 12x - 8$

Nullstellen: $(0 \mid 0)$ doppelt , $(2 \mid 0)$ einfach

Extrema: Max $(0 \mid 0)$; Min $(\frac{4}{3} \mid -\frac{64}{27}) \approx (1.33 \mid -2.37)$

Wendepunkt: WP $(\frac{2}{3} \mid -\frac{32}{27}) \approx (0.67 \mid -1.19)$



Aufgabe 1 b)

$f(x) = 2x^3 - ax^2$; Nullstellen: $x = 0$ (Max) bzw. $x = \frac{a}{2}$

$f'(x) = 6x^2 - 2ax$; $f'(\frac{a}{2}) \underset{\text{soll}}{=} \pm 1 \Rightarrow \frac{1}{2}a^2 = \pm 1 \underset{\text{nur + sinnvoll}}{\Rightarrow} \underline{\underline{a = \sqrt{2}}}$

Aufgabe 1 c) $\left|\int_0^{\frac{a}{2}} (2x^3 - ax^2)\,dx\right| = \left|\left[\frac{1}{2}x^4 - \frac{a}{3}x^3\right]_0^{\frac{a}{2}}\right| = \left|-\frac{1}{96}a^4\right| \underset{\text{weil } a^4>0}{=} \frac{1}{96}a^4 \underset{\text{soll}}{=} 216 \Rightarrow a \underset{\text{weil a>0 verlangt}}{=} + \sqrt[4]{20736} = \underline{\underline{12}}$

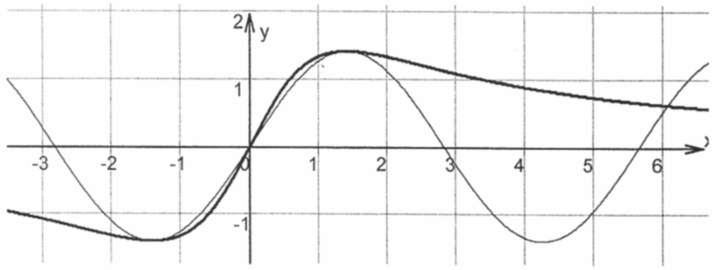
Aufgabe 2 a)

$f(x) = \dfrac{4x}{x^2 + 2} \underset{\text{Quotienten-regel}}{\Rightarrow} f(x) = \dfrac{-4x^2 + 8}{(x^2 + 2)^2}$

Einzige Nullstelle (f=0): $x = 0$

Extrema (f'=0): $(\pm\sqrt{2} \mid \pm\sqrt{2})$

Asymptote: x-Achse



Die *unverzerrte* Sinusfunktion hat die fraglichen Extrema bei $x = \pm\frac{\pi}{2}$, die *gesuchte* soll sie bei $x = \pm\sqrt{2}$ haben. Also $d \cdot (\pm\sqrt{2}) = \pm\frac{\pi}{2} \Rightarrow \underline{\underline{d = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}}}$. Ferner soll die Amplitude $\underline{\underline{c = \sqrt{2}}}$ betragen.

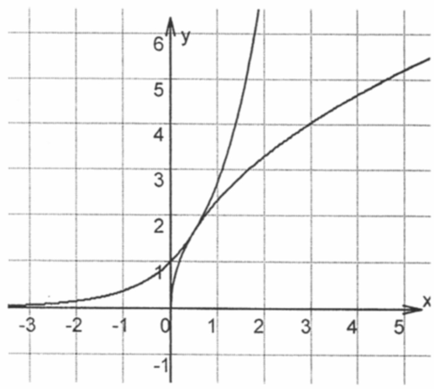
Aufgabe 2 b)

$f(x) = a\sqrt{x}$; $f'(x) = \dfrac{a}{2\sqrt{x}}$; $g(x) = e^x$; $g'(x) = e^x$

Die x-Koordinate des Berührpunktes heisse u:

$$\left.\begin{array}{l} f(u) = g(u) \\ f'(u) = g'(u) \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a\sqrt{u} = e^u \\ \frac{a}{2\sqrt{u}} = e^u \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{a}\sqrt{u} = \frac{\cancel{a}}{2\sqrt{u}} \Rightarrow u = \frac{1}{2} \Rightarrow \underline{\underline{a}} = 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} \cdot e^{\frac{1}{2}} = \underline{\underline{\sqrt{2e}}}$$



Aufgabe 3 a)

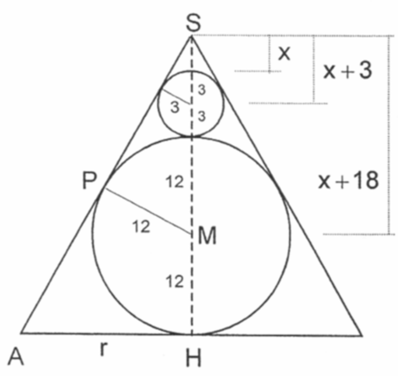
2. Strahlensatz: $\dfrac{x + 3}{x + 18} = \dfrac{3}{12} \Rightarrow x = 2$

$\Rightarrow \overline{SM} = 20 \Rightarrow \overline{SP} = \sqrt{20^2 - 12^2} = 16$; $\overline{SH} = 20 + 12 = 32$

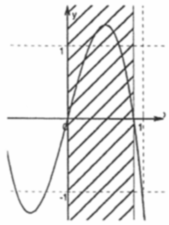
Ähnlichkeit der Dreiecke SMP und SAH:

$\dfrac{r}{\overline{SH}} = \dfrac{12}{\overline{SP}} \Leftrightarrow \dfrac{r}{32} = \dfrac{12}{16} \Rightarrow r = 24$

Volumen: $V = \frac{\pi}{3} \cdot r^2 \cdot \overline{SH} = \frac{\pi}{3} 24^2 \cdot 32 = \underline{\underline{6144\pi}} \approx 19302$



Aufgabe 3 b) Breite $= x$; Länge $= 6x$; Höhe $= y$; Volumen $= x \cdot 6x \cdot y = 6x^2 y$



$$\text{Oberfläche} = 2 \cdot (x \cdot 6x + x \cdot y + 6x \cdot y) = 12x^2 + 14xy \underset{\text{soll}}{=} 9 \ [m^2] \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9 - 12x^2}{14x}$$

$$\Rightarrow \ \text{Volumen}: \ V(x) = 6x^2 \cdot y = 6x^2 \cdot \frac{9 - 12x^2}{14x} = \tfrac{27}{7}x - \tfrac{36}{7}x^3 \quad ; \quad V'(x) = \tfrac{27}{7} - \tfrac{108}{7}x^2$$

$$\text{Extremum}: \quad V' = 0 \quad \Rightarrow \quad x = \tfrac{1}{2} \quad ; \quad V(\tfrac{1}{2}) = \tfrac{9}{7} \quad \Rightarrow \quad \underline{\underline{V_{max} = \tfrac{9}{7} \, m^3 \approx 1.29 \, m^3}}$$

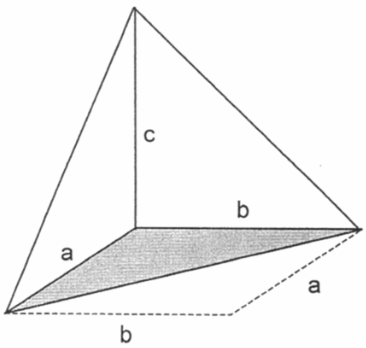
Aufgabe 4 a) Keinen Fünfer: $P(0) = (\frac{5}{6})^5 = \frac{3125}{7776}$. Genau 1 Fünfer: $P(1) = \underset{\text{Anzahl Pfade}}{5} \cdot \underset{\text{1 Fünfer}}{(\frac{1}{6})^1} \cdot \underset{\text{4 andere}}{(\frac{5}{6})^4} = \frac{3125}{7776}$

Zwei oder mehr Fünfer: $P(\geq 2) = 1 - P(0) - P(1) = 1 - \frac{3125}{7776} - \frac{3125}{7776} = \underline{\underline{\frac{1526}{7776}}} = 19.6\%$

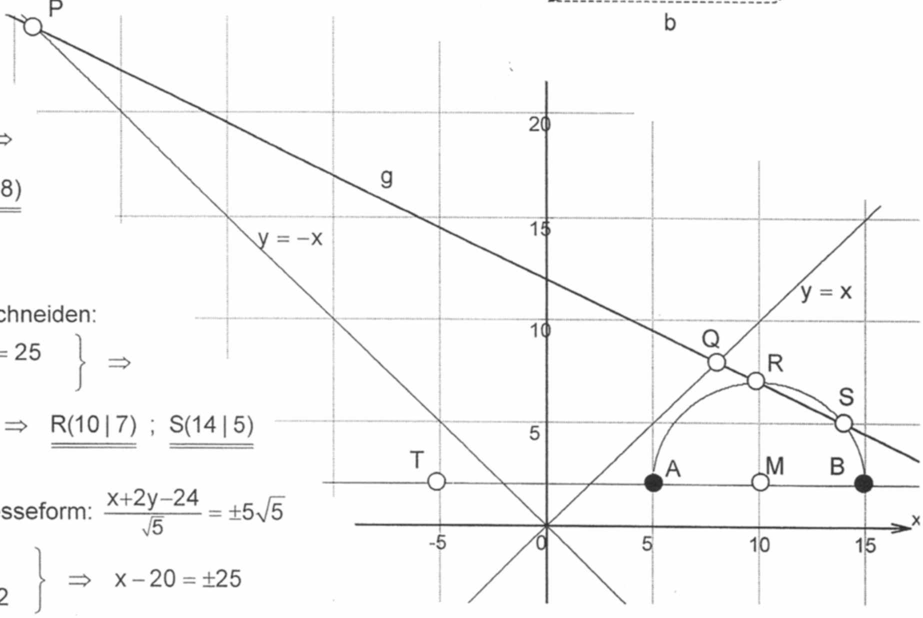
Aufgabe 4 b)

Damit A und B sitzen können, muss $n \geq 2$ gelten. A setzt sich irgendwo hin. Für B bleiben dann $(n-3)$ günstige von $(n-1)$ möglichen Plätzen. Die Platzierung der weiteren Personen ist belanglos. Somit ist $P_n = \dfrac{n-3}{n-1}$. Verlangt ist nun $P_n = \dfrac{n-3}{n-1} > 0.9$. Wegen $n \geq 2$ ist der Nenner positiv, so dass wir problemlos mit $(n-1)$ multiplizieren können: $n - 3 > 0.9(n-1) \Rightarrow 0.1n > 2.1 \Rightarrow \underline{\underline{n > 21}}$.

Aufgabe 4 c)



Volumen $V = \frac{1}{3} \cdot \text{Grundfläche} \cdot \text{Höhe} = \frac{1}{3} \cdot \frac{ab}{2} \cdot c = \frac{abc}{6}$.
Verlangt ist $V = 1$, also $abc = 6$.
Die Frage lautet somit: Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, in drei Würfen das Produkt 6 zu erzielen.
Mögliche Fälle: $6^3 = 216$.
Günstige Fälle: 116, 161, 611, ferner 123, 132, 213, 231, 312, 321.
$P = \frac{9}{216} = \underline{\underline{\frac{1}{24}}}$



Aufgabe 5 a)

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 24 = 0 \\ y = \pm x \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$\underline{\underline{P(-24 \mid 24)}}$; $\underline{\underline{Q(8 \mid 8)}}$

Aufgabe 5 b)

Thaleskreis mit g schneiden:

$$\left.\begin{array}{l} (x-10)^2 + (y-2)^2 = 25 \\ x + 2y - 24 = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$x = \langle {10 \atop 14}$; $y = \langle {7 \atop 5}$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{R(10 \mid 7)}}$; $\underline{\underline{S(14 \mid 5)}}$

Aufgabe 5 c) Hesseform: $\dfrac{x+2y-24}{\sqrt{5}} = \pm 5\sqrt{5}$

$$\left.\begin{array}{l} x + 2y - 24 = \pm 25 \\ \text{Gerade (AB)} \ y = 2 \end{array}\right\} \Rightarrow \ x - 20 = \pm 25$$

$\Rightarrow x = \langle {45 \atop -5}$; $y = 2$ $\Rightarrow$ $\underline{\underline{T(-5 \mid 2)}}$; $\underline{\underline{U(45 \mid 2)}}$