Maturitätsprüfungen Mathematik

Frühling 2003, Zürich

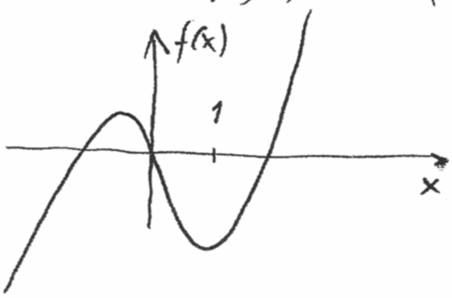
Normales Niveau

1.) $f(x) = ax^3 - 3x^2 - ax \;;\; a \neq 0$

a) $3x^3 - 3x^2 - 3x = 3x(x^2 - x - 1) \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_{2,3} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \end{cases}$

$f'(x) = 9x^2 - 6x - 3 \Rightarrow x^E_{1,2} = \frac{1 \pm 2}{3}$

Max. $\left(-\frac{1}{3} \middle| \frac{5}{9}\right)$ ; Min. $(1|-3)$ und $f(0) = 0$




Nicht massstäblich

b.) $f'(x) = 3ax^2 - 6x - a \;;\; f''(x) = 6ax - 6 = 0 \Rightarrow$

$x_w = \frac{1}{a} \;;\; f(x_w) = \frac{1}{a^2} - \frac{3}{a^2} - 1 = -3 \Rightarrow \underline{\underline{a = \pm 1}}$

c.) $\int_0^a (ax^3 - 3x^2 - ax)\,dx = \left(\frac{a}{4}x^4 - x^3 - \frac{a}{2}x^2\right)\Big|_0^a =$

$= \frac{a^5}{4} - \frac{3a^3}{2} = 0$

$\Rightarrow \underline{\underline{a = \pm\sqrt{6}}} \;;\; (a \neq 0)$

2.) $f(x) = \frac{ax^2 + bx}{cx+1}$

a) $f(x) = \frac{3x^2 + 3x}{3x+1} = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \,;\, x_2 = -1$

$f'(x) = 3 \cdot \frac{3x^2+2x+1}{(3x+1)^2} \Rightarrow f'(-1) = \frac{3}{2} = \tan(\alpha)$

$\Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 56.3^\circ}}$

b.) Vertikale Asymptote : $x = 1 \Rightarrow cx+1 = 0$ für $x = 1$
$\Rightarrow \underline{\underline{c = -1}}$

Schiefe A. : $y = 2x - 7 \Rightarrow \underline{\underline{a = -2}}$ (Steigung)

$f(x) = (-2x^2 + bx) : (-x+1) = \underbrace{2x - (b-2)}_{2x-7} + R(x)$ { Nach Voraussetzung

$\Rightarrow b - 2 = 7 \Rightarrow \underline{\underline{b = 9}}$

---

3.) $A(0/-2)$; $P(4/-1)$ ; $g: x + 4y - 22 = 0$

a) Q muss auf den Winkelhalbierenden von $a(AP)$ und $g$ liegen (Mit H.N.F.)

$a(AP) : x - 4y - 8 = 0$

$\Rightarrow \frac{1}{\sqrt{17}} |(x+4y-22)| = \frac{1}{\sqrt{17}} |(x-4y-8)|$

$\Rightarrow w_{1/2} : x + 4y - 22 = \pm (x - 4y - 8)$

$w_1 : y = \frac{7}{4}$ : Kein Schnittpunkt mit der x-Achse

$w_2 : x = 15 \Rightarrow \underline{\underline{Q(15/0)}}$

3b.) Nur <u>positiv</u> orientiertes Quadrat berücksichtigt ($\rightarrow$ 2 Lösungen)
D = Schnitt der Normalen n bezüglich a durch A.
$\Rightarrow n: y = -4x - 2$ ; $D = n \cap g = (-2/6)$
(Gleichungssystem lösen)

$\Rightarrow \vec{AD} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{DC} = \vec{AB} = \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{B(8/0)\ ;\ C(6/8)}}$

---

4.) $p(\text{Faule Kastanie}) = p = \frac{1}{100}$ $\left\{ \begin{array}{l} 1 \text{ Packung} \mathrel{\hat{=}} \\ \mathrel{\hat{=}} 20 \text{ Kastanien} \end{array} \right.$

a) $P = (1-p)^{20} = (0.99)^{20} = \underline{\underline{0.818}}$

b.) Bernoulli-Aufgabe:

$$P = \binom{100}{1} \cdot p^1 \cdot q^{99} = 100 \cdot \frac{1}{100} \cdot 0.99^{99} = \underline{\underline{0.370}}$$

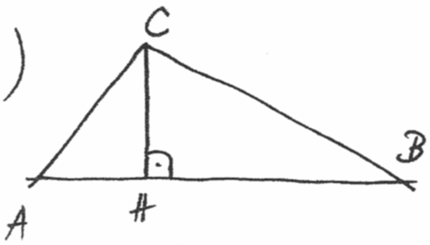
c.) mindestens 2 ungeniessbare Kastanien $\hat{=}$
$\hat{=}$ nicht keine und nicht genau 1 ungeniessbare K.

- In einer Packung: $P = 1 - \left( (0.99)^{20} + \binom{20}{1} \cdot 0.99^{19} \cdot 0.01 \right) =$
$= 0.0168593$
- In beiden Packungen: $P^2 = \underline{\underline{0.000284}}$

5 a) $\vec{b} = \overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 0 \\ -8 \\ 2 \end{pmatrix}$ ; $\vec{c} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \vec{b} \cdot \vec{c} = 108 \Rightarrow \cos(\alpha) = \dfrac{108}{\sqrt{68 \cdot 216}} \Rightarrow \underline{\underline{\alpha = 27.0^\circ}}$

b.)




$\overrightarrow{AH} = t \cdot (\overrightarrow{AB}) = t \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} \Rightarrow$

$\overrightarrow{CH} = \begin{pmatrix} 4t \\ -14t + 8 \\ -2t - 2 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CH} = 0 = \begin{pmatrix} 4 \\ -14 \\ -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4t \\ -14t + 8 \\ -2t - 2 \end{pmatrix} \Rightarrow t = \frac{1}{2}$

$\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{AH} = \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -7 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow H(2|1|1) = \underline{\underline{|CH| = \sqrt{14}}}$

(Falls Normalebenen bekannt:
{Normalebene durch C bezügl. g(AB)} schneiden
mit g(AB)}

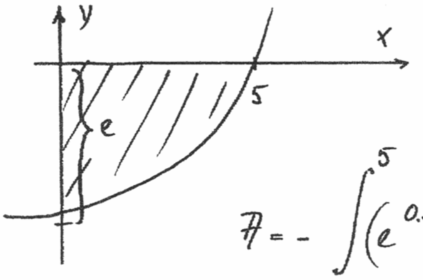
---

) $f(x) = e^{0.5x}$ ; $\vec{v} = \begin{pmatrix} p \\ -e \end{pmatrix}$ = Verschiebungsvektor

$\Rightarrow g(x) = e^{0.5(x-p)} - e$

a) $e^{0.5(5-p)} - e = 0 \Rightarrow \underline{p = 3}$

6 b.)




$$A = -\int_0^5 \left(e^{0.5(x-3)} - e\right) dx =$$

$$= \left(-\frac{1}{0.5} e^{0.5(x-3)} + ex\right)\Big|_0^5 = 3e + \frac{2}{e^{1.5}} \approx$$

$$\approx 8.60$$