

**Mathematik**                      **Typen A, B, D, E, bzw. normales Niveau**

- Bei jeder Aufgabe soll mit einer neuen Seite begonnen werden. Die Aufgabenblätter sind am Schluss der Prüfung mit den Lösungen abzugeben.
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, etc. stehen. Falls Sie dennoch die Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese auf 3 wesentliche Ziffern.
- Die Punkteverteilung pro Aufgabe ist:

Aufgabe	1a	1b	2a	2b	2c	3a	3b	4a	4b	4c	5a	5b	6a	6b
Punkte	5	3	2	4	2	4	3	2	3	3	3	4	3	4

- Für die Maximalnote sind höchstens 40 Punkte zu erzielen. Die restlichen Punkte bis zur maximalen Punktzahl 45 entsprechen fakultativen Aufgaben.

- 1) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = x^3 - ax^2$ ,  $a$  konstant,  $a > 0$ .
- a) Berechnen Sie für den Spezialfall  $a = 3$  die Nullstellen und die Koordinaten der Extrempunkte. Skizzieren Sie damit den Grafen von  $f$ . Gesucht ist die Gleichung einer ganzrationalen Funktion 4. Grades, deren Graf  $g$  symmetrisch zur  $y$ -Achse verläuft, so dass alle Extrempunkte von  $f$  auch Extrempunkte von  $g$  sind. Skizzieren Sie  $g$ .
- b) Es sei nun  $a$  wieder beliebig. In der positiven Nullstelle von  $f$  wird die Tangente  $t$  an den Grafen von  $f$  gelegt. Wie ist  $a$  zu wählen, damit  $t$  durch den Punkt  $P(0/-8)$  verläuft?

- 2) Gegeben ist die Funktion  $f$  mit  $f(x) = \frac{2x^2}{x^2 + 3x - 10}$

Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen. Ihre Antworten sind hinreichend zu begründen.

- a)  $f$  hat genau 3 Asymptoten.
- b)  $f$  hat genau einen Extrempunkt.
- c)  $f$  schneidet die Gerade  $x+2y=0$  in genau 3 Punkten.

- 3) Gegeben ist die Gerade  $g$  mit der Gleichung  $y = 2x$ .
- Ein Kreis mit Mittelpunkt  $M(7/-6)$  schneidet aus  $g$  eine Sehne  $PQ$  der Länge 16 heraus. Berechnen Sie die Koordinaten von  $P$  und  $Q$ .
  - Ein Kreis mit Radius 1 hat seinen Mittelpunkt im I. Quadranten und berührt sowohl die  $x$ -Achse als auch  $g$ . Berechnen Sie die Koordinaten des Kreismittelpunktes.
- 4) a) Aus einer Urne, welche 10 rote und 13 schwarze Kugeln enthält, werden mit einem Griff 4 Kugeln genommen. Wie gross ist die Wahrscheinlichkeit, dass genau 2 schwarze Kugeln genommen wurden?
- b) Wie oft habe ich drei Spielwürfel zu werfen, damit die Wahrscheinlichkeit, immer drei gerade Zahlen zu werfen, kleiner als  $10^{-16}$  ist?
- c) In einer Urne sind alle Kugeln entweder gelb oder blau. Total sind es 100 Kugeln. Es werden mit einem Griff zwei Kugeln genommen. Die Wahrscheinlichkeit, zwei verschiedenfarbige Kugeln zu nehmen, ist mindestens so gross wie die Wahrscheinlichkeit, zwei gelbe zu nehmen. Wie viele gelbe Kugeln sind in der Urne?
- 5) a) Gegeben sind die Punkte  $A(2/0/0)$ ,  $B(0/b/0)$  und  $C(0/0/\frac{2}{b})$ .  
Für welche Werte von  $b$  hat das Dreieck  $ABC$  den Flächeninhalt  $\sqrt{6}$ ?
- b) Gegeben ist der Vektor  $\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ . Gesucht ist ein Vektor  $\vec{b}$  parallel zur Geraden  $y = -x + 3$ , so dass  $\vec{a} + \vec{b}$  senkrecht auf  $\vec{a} - \vec{b}$  steht.
- 6) a) Von einem regelmässigen 9-Eck ist die Seitenlänge  $s$  gegeben. Berechnen Sie die längste Diagonale.
- b) Skizzieren Sie im Intervall  $0 < x < \pi$  die Kurven  $f$  und  $g$  mit  $f(x) = \sin(x)$  und  $g(x) = k \cdot \cos(x)$ . Dabei ist  $k$  eine positive Konstante. Berechnen Sie den Inhalt des Flächenstücks, welches von der positiven  $y$ -Achse und den Kurven  $f$  und  $g$  begrenzt ist, wenn  $f$  und  $g$  ihren Schnittpunkt auf der Geraden  $y = 0.5$  haben.