

Mathematik

Normales Niveau (Schweiz. Maturitätsprüfung)

bzw. Typen A / B / D / E (Eidg. Maturitätsprüfung)

Dauer: 4 Stunden

- Verwenden Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt!
- Geben Sie die Resultate nach Möglichkeit exakt an, d.h. lassen Sie Wurzeln, gekürzte Brüche, π , etc. stehen. Falls Sie Resultate als Dezimalbrüche angeben wollen, runden Sie diese sinnvoll, z.B. auf 3 wesentliche Ziffern.
- Jede Aufgabe wird mit je maximal 10 Punkten bewertet. Für die Note 6 wird nicht die maximale Punktzahl verlangt.

1. Es wird die Funktion f mit der Vorschrift $f(x) = ax^3 - x$ ($a \neq 0$) betrachtet.

- a) Diskutieren Sie die Funktion für $a = \frac{1}{4}$ (Nullstellen, Extremalstellen, Wendestellen, Verhalten im Unendlichen) und erstellen Sie eine Skizze ihres Graphen.
- b) Zeigen Sie, dass der Graph von f mit der Winkelhalbierenden $y = x$ (je nach gewähltem a) entweder einen oder drei gemeinsame Punkte besitzt.
Im zweiten Fall schliessen der Graph von f und diese Winkelhalbierende zwei kongruente Flächen ein. Bestimmen Sie a derart, dass die Inhalte dieser beiden Flächen je 1 sind.

2. Lösen Sie die beiden voneinander unabhängigen Aufgaben.

2.1. Der Betrag eines Vektors \vec{a} ist dreimal so gross wie derjenige eines Vektors \vec{b} ; der Vektor \vec{a} steht senkrecht auf dem Vektor $\vec{c} = \vec{a} + 4\vec{b}$.
Bestimmen Sie den Zwischenwinkel von \vec{a} und \vec{b} .

2.2. Gegeben ist ein erster Kreis k_1 mit der Gleichung $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 20 = 0$ und die Gerade g durch die beiden Punkte $(-3/5)$ und $(4/6)$.
Bestimmen Sie Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 des Kreises k_1 sowie den Radius r_2 eines zweiten Kreises k_2 , der den Mittelpunkt $M_2(1/2)$ hat und die Gerade g berührt.

3. a) In einer Urne befinden sich 2 rote, 2 blaue, 6 weisse und 10 schwarze Kugeln. Man zieht gleichzeitig und zufällig 2 Kugeln. Untersuchen Sie, ob die folgende Behauptung wahr ist: „Die Wahrscheinlichkeit, 2 verschieden farbige Kugeln zu ziehen, ist genau doppelt so gross wie die Wahrscheinlichkeit, 2 gleich farbige Kugeln zu ziehen.“
- b) Eine andere Urne enthält 10 Kugeln, wovon einige schwarz und die anderen weiss sind. Die Wahrscheinlichkeit, beim Ziehen zweier Kugeln 2 gleich farbige zu erhalten, ist um $\frac{1}{15}$ kleiner als die Wahrscheinlichkeit, zwei verschieden farbige Kugeln zu ziehen. Wie viele weisse Kugeln sind in der Urne?

4. Lösen Sie die beiden voneinander unabhängigen Aufgaben.

4.1. Bestimmen Sie eine reelle Zahl c derart, dass sich die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x$ und $g(x) = \frac{1}{c}e^x$ in einem Punkt berühren.

Wie gross ist der Inhalt der Fläche, welche von den beiden Graphen und der y -Achse eingeschlossen wird?

4.2. Es wird die Funktion mit der Vorschrift $f(x) = a \cdot \sin x + \cos x$ ($a > 0$) betrachtet.

a) Skizzieren Sie den Graphen von f für $a = 1$ ($0 \leq x \leq 2\pi$).

b) Wie muss a gewählt werden, damit die Funktion f bei $x = \frac{\pi}{6}$ ein Maximum besitzt?

5. Lösen Sie das folgende Gleichungssystem auf:

$$\begin{cases} \lg(x) + \lg(y) = 2 \\ \lg(x+7) - \lg(y-8) = 0 \end{cases} \quad (\text{dabei ist } \lg \text{ der Logarithmus zur Basis } 10).$$

Das Gleichungssystem

$$\begin{cases} 3bx - y = c \\ 12x - by = d \end{cases} \quad (\text{dabei sind } b, c \text{ und } d \text{ reelle Zahlen})$$

besitzt unendlich viele Lösungspaare. Eines dieser Lösungspaare ist auch Lösung des obigen Gleichungssystems. Bestimmen Sie b , c und d (alle Lösungen).