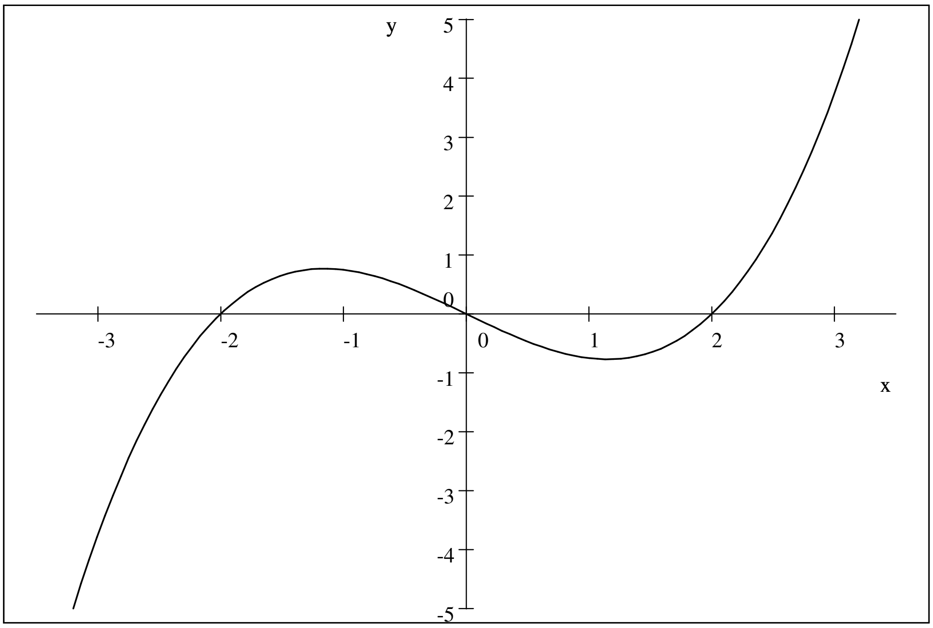
Frühjahr 2005

1. Es wird die Funktion mit der Vorschrift $f(x) = ax^3 - x \;\; (a \neq 0)$ betrachet.
   a) Diskutieren Sie die Funktion für $a = \frac{1}{4}$ (Nullstellen, Extrema, Wendestellen, Verhalten im Unendlichen) und erstellen Sie eine Skizze des Graphen.
   $f(x) = \frac{1}{4}x^3 - x$
   Das Verhalten im Unendlichen wird durch das Vorzeichen der größten Potenz bestimmt : $+x^3$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$$



   Da nur ungerade Exponenten vorhanden sind ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.
   Nullstellen : x=0,-2,+2
   $Min\left(\frac{2}{3}\sqrt{3}\,|-\frac{4}{9}\sqrt{3}\right)$ und $Max\left(-\frac{2}{3}\sqrt{3}\,|\,\frac{4}{9}\sqrt{3}\right)$
   Ein Wendepunkt bei $W\,(0|0)$.
   b) Zeigen Sie, dass der Graph von f mit der Winkelhalbierenden y=x (je nach gewähltem a) entweder ein oder drei gemeinsame Punkte besitzt.
   Im zweiten Fall schliesst der Graph von f und diese Winkelhalbiernde zwei kongruente Flächen ein. Bestimmen Sie a derart, dass die Inhalte dieser beiden Flächen je 1 sind.

$$\begin{aligned} f(x) &= x \\ x_1 &= 0 && \text{, immer Lösung, unabhängig von a} \\ x_{2/3} &= \pm\sqrt{\frac{2}{a}} && \text{, nur Lösungen, wenn a>0} \end{aligned}$$

   Es gibt also immer zumindest einen Schnittpunkt bei (0|0). Wenn a>0 ist, kommen noch zwei weitere Schnittpunkte hinzu.

$$\begin{aligned} A &= 1 \\ a &= 1 \end{aligned}$$

2. Lösen Sie die beiden voneinander unabhängigen Aufgaben.
   2.1 Der Betrag eines Vektors $\overrightarrow{a}$ ist dreimal so gross wie der eines Vektors $\overrightarrow{b}$. Der Vektor $\overrightarrow{a}$ steht senkrecht auf $\overrightarrow{c} = \overrightarrow{a} + 4\overrightarrow{b}$.
   Bestimmen Sie den Zwischenwinkel von $\overrightarrow{a}$ und $\overrightarrow{b}$.

$$\begin{aligned} \cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}}{a \cdot b} \\ \cos\alpha &= \frac{\overrightarrow{a} \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a})}{4 \cdot a \cdot b} && |\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} = 0 \\ \cos\alpha &= -\frac{3}{4} \\ \alpha &= 138,6^\circ \end{aligned}$$

2.2 Gegeben ist ein Kreis k_1 mit der Gleichung $x^2 - 2x + y^2 - 4y - 20 = 0$ und die Gerade g durch die Punkte (-3|5) und (4|6).
Bestimmen Sie den Mittelpunkt M_1 und Radius r_1 des Kreises k_1 sowie den Radius r_2 eines zweiten Kreises k_2 , der den Mittelpunkt M_2 $(1|2)$ hat und die Gerade g berührt.

$$\begin{aligned} x^2 - 2x + y^2 - 4y - 20 &= 0 \\ (x-1)^2 + (y-2)^2 &= 5^2 \end{aligned}$$

Der Kreis 1 hat den Mittelpunkt M_1 $(1|2)$ und den Radius $r_1 = 5$.
Wenn der Kreis 2 die Gerade berühren soll, dann muss der Radius 2 gleich dem Abstand des Mittelpunkts zur Gerade sein.
Über die Hesse-Form der Geraden :

$$\frac{x - 7y + 38}{\sqrt{1^2 + 7^2}} = 0$$

Die linke Seite der Hesse-Form ergibt für jeden Punkt (x|y) den Abstand zur Geraden. Für M_2 $(1|2)$ ergibt sich :

$$r_2 = \frac{5}{2}\sqrt{2}$$

a) In einer Urne befinden sich 2 rote, 2 blaue, 6 weisse und 10 schwarze Kugeln. Man zieht gleichzeitig und zufällig 2 Kugeln. Untersuchen Sie ob folgende Behauptung wahr ist : "Die Wahrscheinlichkeit, 2 verschiedenfarbige Kugeln zu ziehen, ist genau doppelt so gross wie die Wahrscheinlichkeit, 2 gleichfarbige Kugeln zu ziehen."

$$\begin{aligned} \text{WS(verschiedene Farben)} &\stackrel{?}{=} \text{2 WS(gleiche Farben)} \\ \text{1 - WS(gleiche Farbe)} &= \text{2 WS(gleiche Farben)} \\ \text{WS(gleiche Farben)} &= \frac{1}{3} \\ \text{WS(blau,blau)+WS(rot,rot)+WS(weiss,weiss) +WS(schwarz,schwarz)} &= \frac{1}{3} \\ \frac{2}{20}\cdot\frac{1}{19} + \frac{2}{20}\cdot\frac{1}{19} + \frac{6}{20}\cdot\frac{5}{19} + \frac{10}{20}\cdot\frac{9}{19} &= \frac{1}{3} \\ \frac{31}{95} &= \frac{1}{3}(f) \end{aligned}$$

Die Aussage ist fast, aber nicht ganz richtig.

3. Eine andere Urne enthält 10 Kugeln, wovon einige schwarz, die anderen weiss sind. Die WS, beim Ziehen zweier Kugeln 2 gleich farbige zu erhalten, ist um $\frac{1}{15}$ kleiner, als die WS, zwei verschieden farbige Kugeln zu ziehen.
Wie viele weisse Kugeln sind in der Urne ?

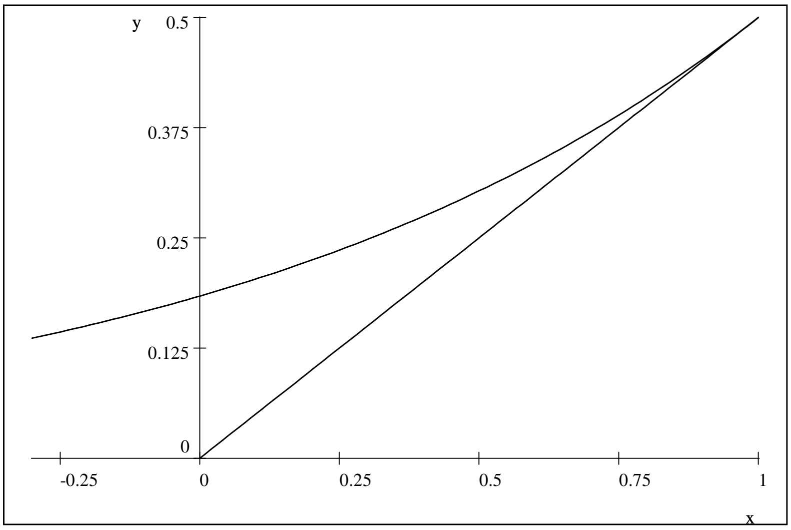
$$\begin{aligned} \text{Anzahl weisse Kugeln} &: \text{x} \\ \text{Anzahl schwarze Kugeln} &: \text{10-x} \\ \text{WS(gleiche Farbe)} &= \text{WS(unterschiedliche Farben) - } \frac{1}{15} \\ x_1 &= 4 \\ x_2 &= 6 \end{aligned}$$

Es befinden sich entweder 4 weisse und 6 schwarze, oder 6 weisse und 4 schwarze Kugeln in der Urne.

4. Lösen Sie die beiden von einander unabhängigen Aufgaben :
4.1 Bestimmen Sie eine reelle Zahl c derart, dass sich die Graphen der beiden Funktionen $f(x) = \frac{1}{2}x$ und $g(x) = \frac{1}{c}e^x$ in einem Punkt berühren.
Wie gross ist der Inhalt der Fläche, welche von den beiden Graphen und der y-Achse eingeschlossen wird ?
Berühren bedeutet, sowohl im y-Wert, also auch in der Steigung übereinstimmen :

$$\begin{aligned} I.f(x) &= g(x) \\ II.f\prime(x) &= g\prime(x) \\ e^1 &= \frac{c}{2} \\ c &= 2e \end{aligned}$$

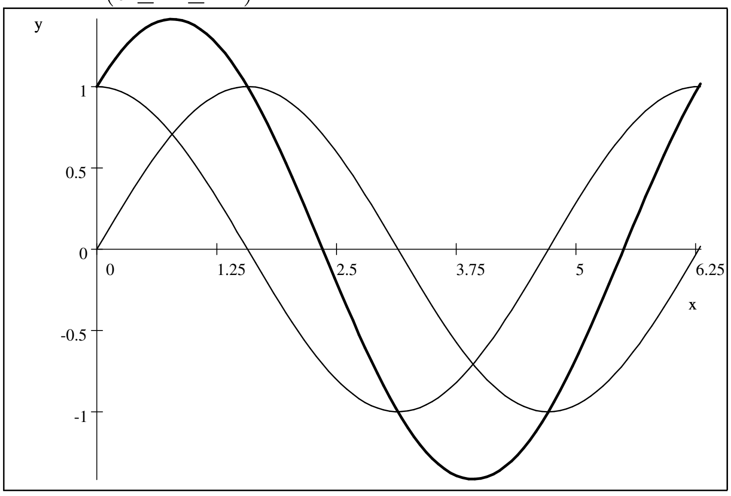
$g(x) = \frac{1}{2e}e^x$



$$A = \int_0^1 (g(x) - f(x))\,dx = \frac{1}{4} - \frac{1}{2e}$$

4.2 Es wird die Funktion mit der Vorschrift $f(x) = a \sin x + \cos x \ \ (a > 0)$ betrachtet.

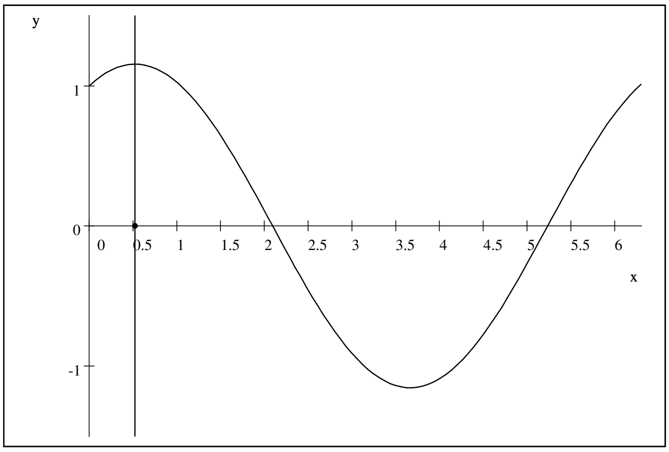
a) Skizzieren Sie den Graphen von f für a=1 $(0 \leq x \leq 2\pi)$.



b) Wie muss a gewählt werden, damit die Funktion f bei $x = \frac{\pi}{6}$ ein Maximum besitzt ?

$$\begin{aligned} f\prime\left(\frac{\pi}{6}\right) &= 0 \\ a &= \frac{1}{3}\sqrt{3} \end{aligned}$$

Nachweis des Maximums über die zweite Ableitung. Also ein Maximum bei $\underline{x = \frac{\pi}{6}}$



5. Lösen Sie folgende Gleichungssysteme auf :

$$\begin{aligned} I.\lg x + \lg y &= 2 \\ II.\lg(x+7) - \lg(y-8) &= 0 \\ y_1 &= -5 \qquad, x_1 = -20 \\ y_2 &= 20 \qquad, x_2 = 5 \end{aligned}$$

Lösung ist (5|20), da die negativen Werte nicht im Definitionsbereich liegen.
Das Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 3bx - y &= c \\ 12x - by &= d \\ b, c, d &\in \mathbb{R} \end{aligned}$$

besitzt unendlich viele Lösungspaare. Eines dieser Lösungspaare ist auch Lösung des obigen Gleichungssystems. Bestimmen Sie b,c und d (alle Lösungen).
Damit ein Gleichungssystem unendlich viele Lösungen besitzt, muss die Nennerdeterminante Null werden (die Koeffizienten der einen Gleichung Vielfache der anderen Gleichung sein) :

$$\begin{aligned} D &= \begin{vmatrix} 3b & -1 \\ 12 & -b \end{vmatrix} = 0 \\ b_{1/2} &= \pm 2 \end{aligned}$$

$b = 2, x = 5, y = 20$

$$\begin{aligned} c &= 10 \\ d &= 20 \end{aligned}$$

$b = -2, x = 5, y = 20$

$$\begin{aligned} c &= -50 \\ d &= 100 \end{aligned}$$